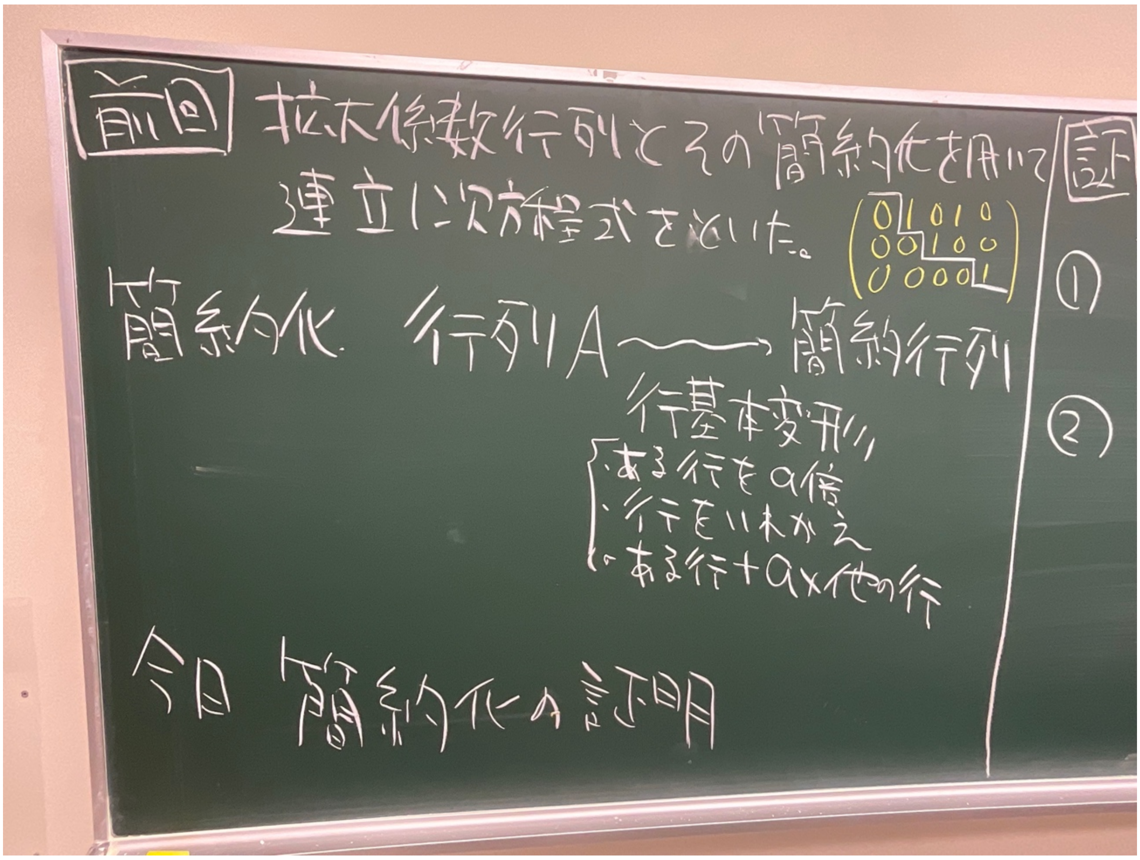


前回 拡大係数行列とその簡約化を用いて連立1次方程式をといた。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

簡約化 $\text{行列}A \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \text{簡約行列}$

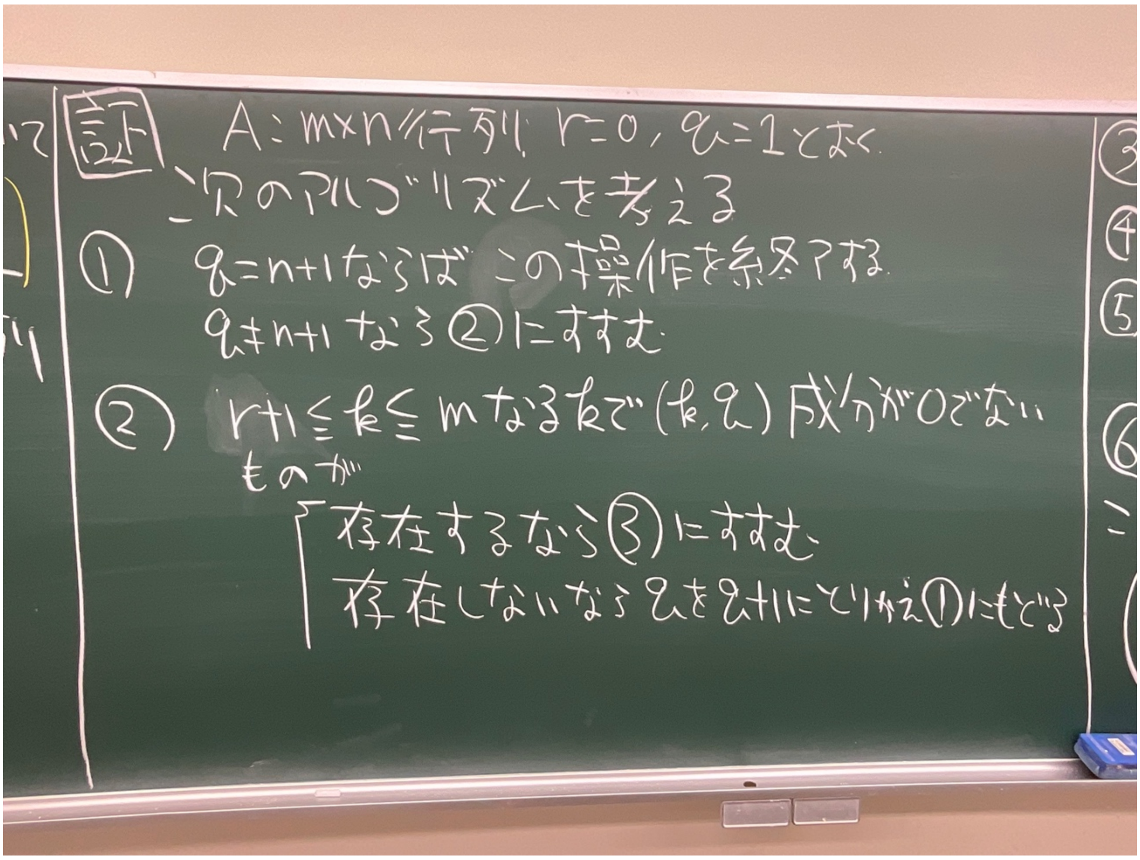
- ある行をa倍
- 行をいれかえ
- ある行$+a\times$他の行

今日 簡約化の証明

証

①

②

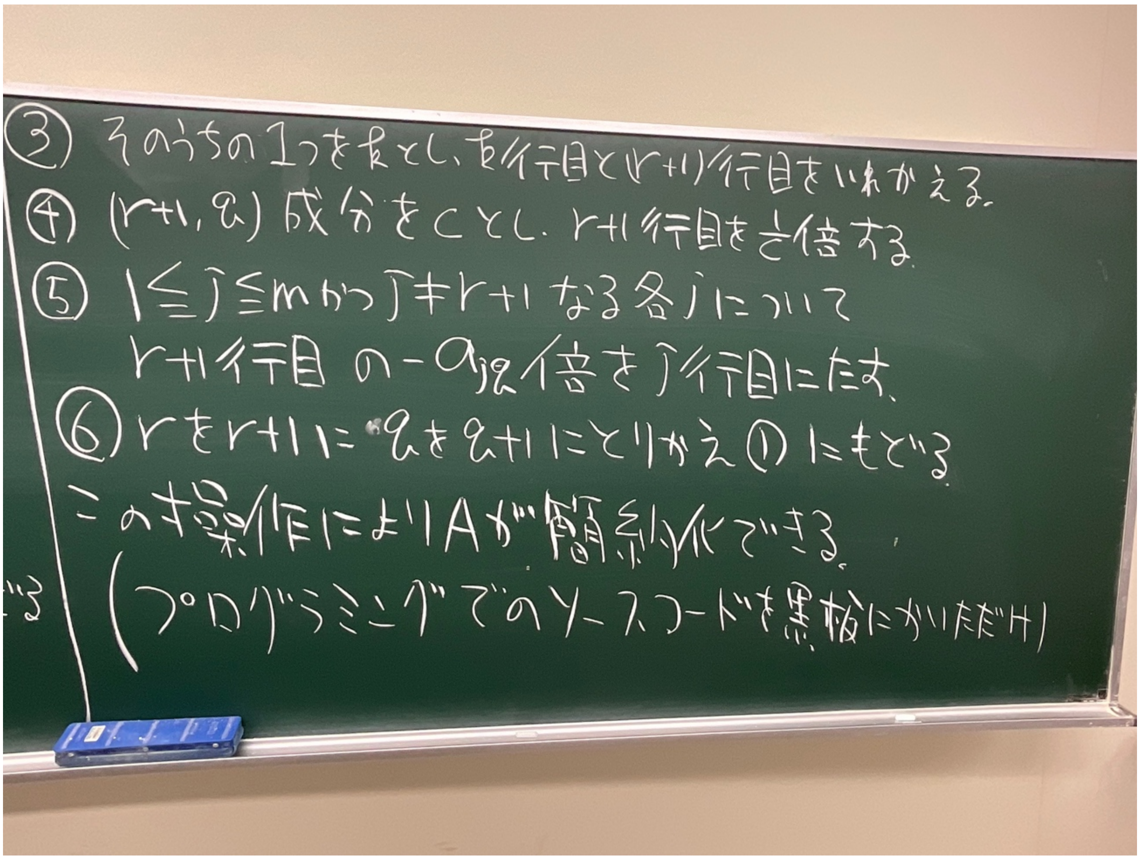


証 A: $m\times n$行列, $r=0$, $q=1$とおく。

次のアルゴリズムを考える

① $q=n+1$ならば この操作を終了する。
$q\neq n+1$ なら②にすすむ

② $r+1\leqq k\leqq m$ なるkで(k,q)成分が0でないものが
- 存在するなら③にすすむ
- 存在しないならqを$q+1$にとりかえ①にもどる



③ そのうちの1つをkとし、k行目とr+1行目をいれかえる。

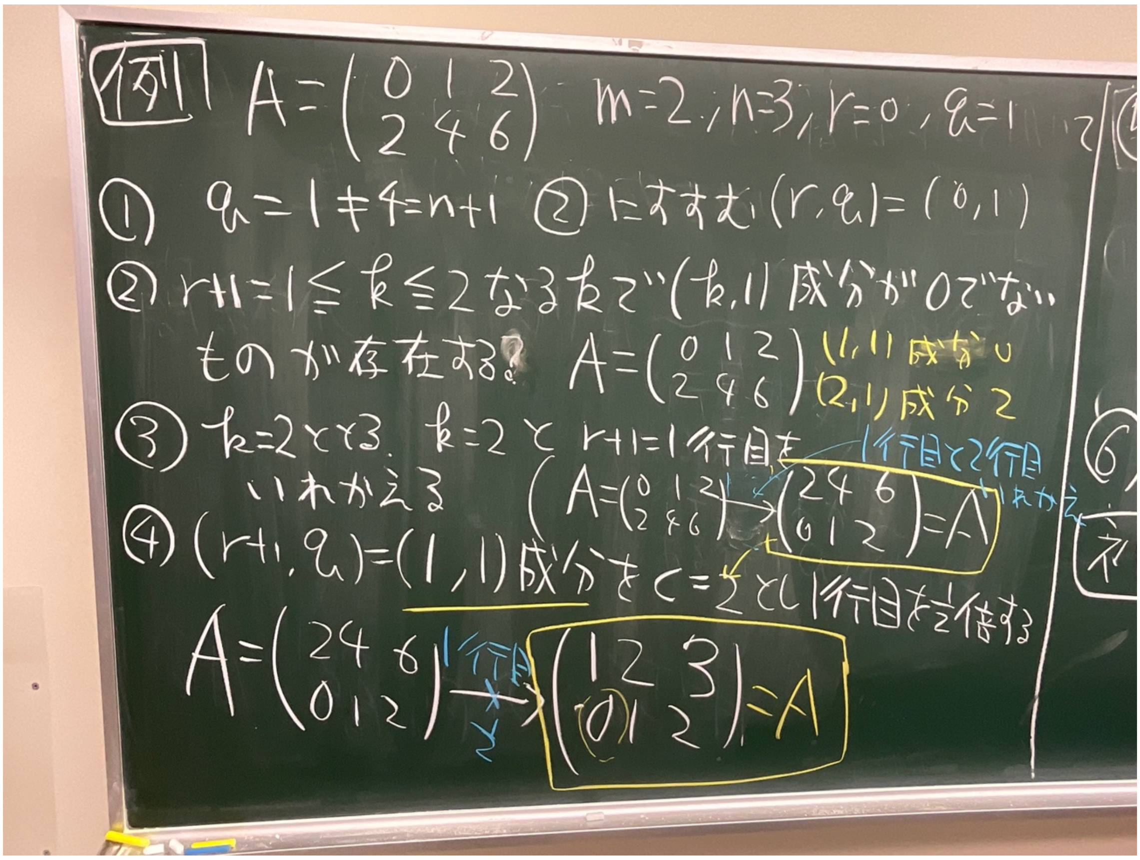
④ (r+1, q) 成分をcとし、r+1行目を $\frac{1}{c}$ 倍する。

⑤ $1 \leqq j \leqq m$ かつ $j \neq r+1$ なる各 j について
r+1行目の $-a_{jq}$ 倍を j 行目にたす。

⑥ rをr+1に qをq+1にとりかえ①にもどる

この操作によりAが簡約化できる。

(プログラミングでのソースコードを黒板にかいただけ)



例 $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\2&4&6\end{pmatrix}$ m=2, n=3, r=0, q=1 て

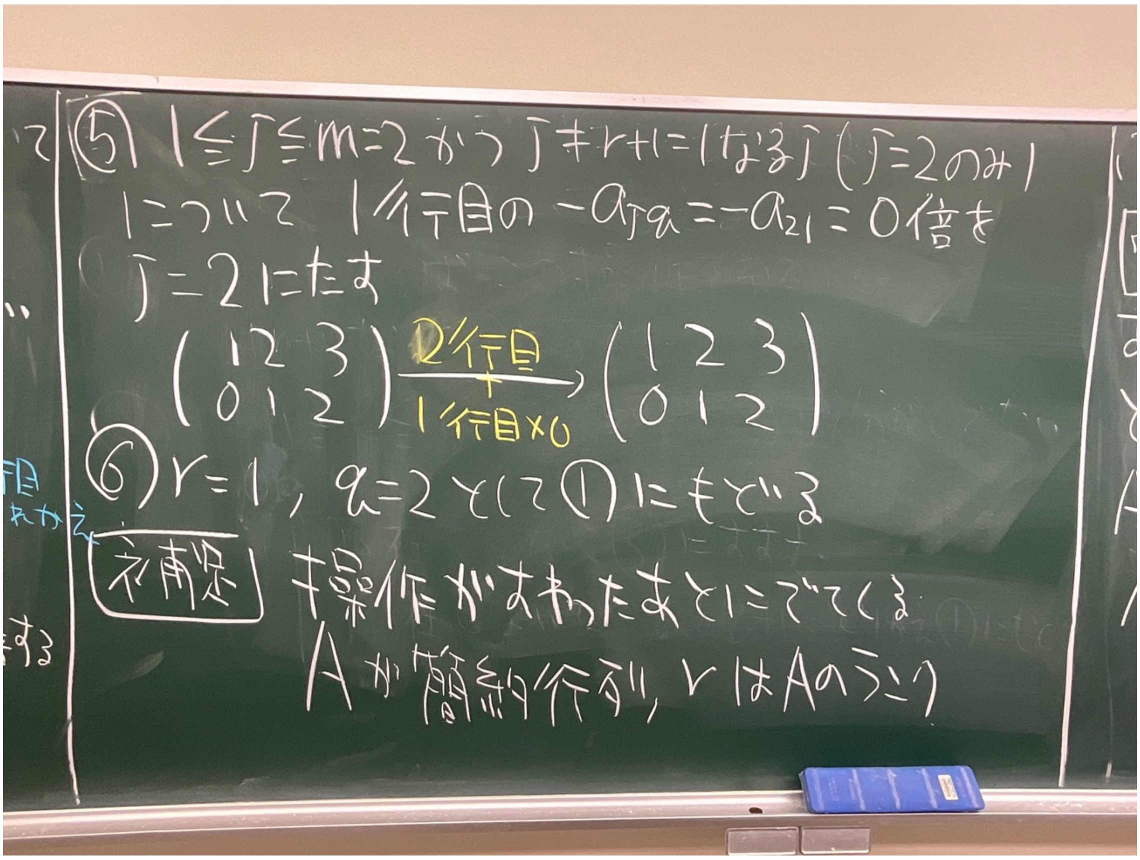
① $q=1 \neq 4=n+1$ ②にすすむ $(r,q)=(0,1)$

② $r+1=1 \leqq k \leqq 2$ なるkで(k,1)成分が0でないものが存在する? $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\2&4&6\end{pmatrix}$ (1,1)成分0 (2,1)成分2

③ k=2とする。k=2とr+1=1行目をいれかえる $\left(A=\begin{pmatrix}0&1&2\\2&4&6\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2&4&6\\0&1&2\end{pmatrix}=A\right.$ 1行目と2行目いれかえ

④ $(r+1, q)=(1,1)$ 成分を $c=2$ とし1行目を $\frac{1}{2}$ 倍する

$$A=\begin{pmatrix}2&4&6\\0&1&2\end{pmatrix} \xrightarrow[\times\frac{1}{2}]{1行目} \boxed{\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}=A}$$

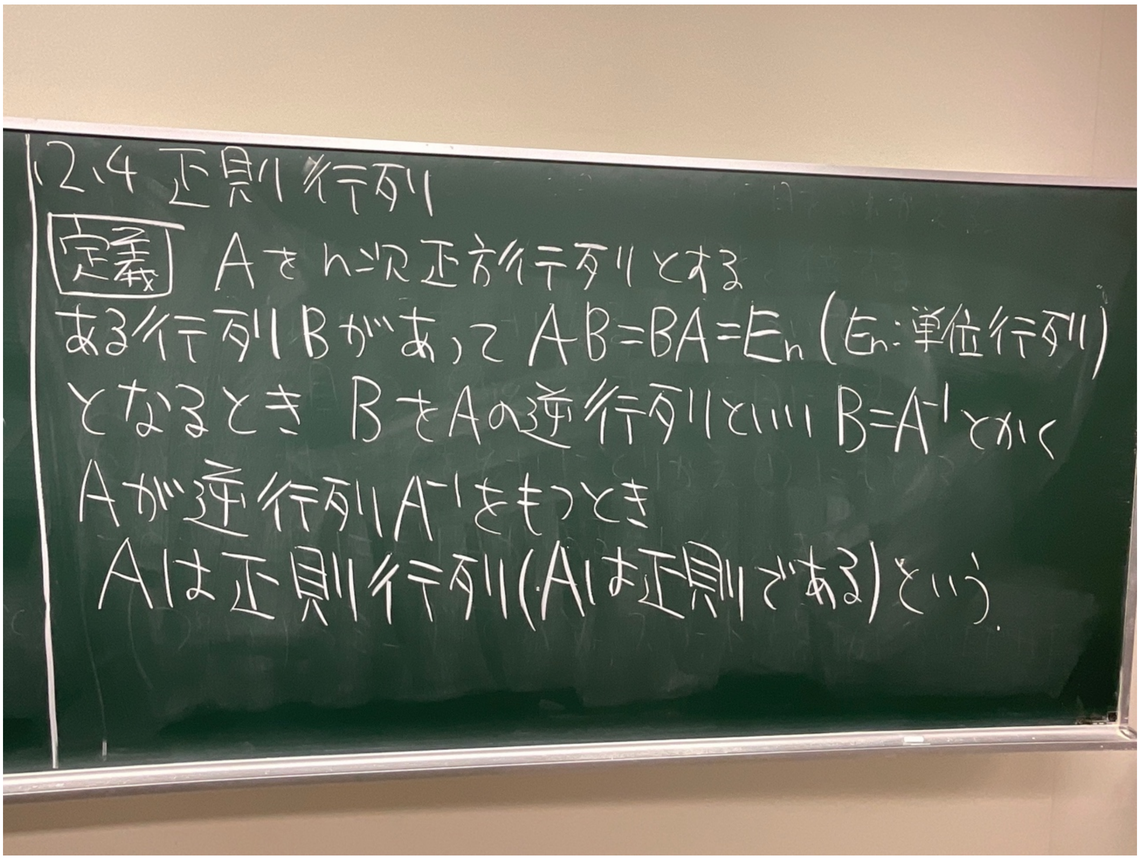


⑤ $1 \leqq j \leqq m=2$ かつ $j \neq r+1=1$ になる j ($j=2$のみ) について 1行目の $-a_{jq}=-a_{21}=0$倍を $j=2$にたす

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1行目×0}]{\text{2行目}+} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

⑥ $r=1$, $q=2$ として ① にもどる

補足 操作がおわったあとにでてくる A が簡約行列, r は Aのランク



2.4 正則行列

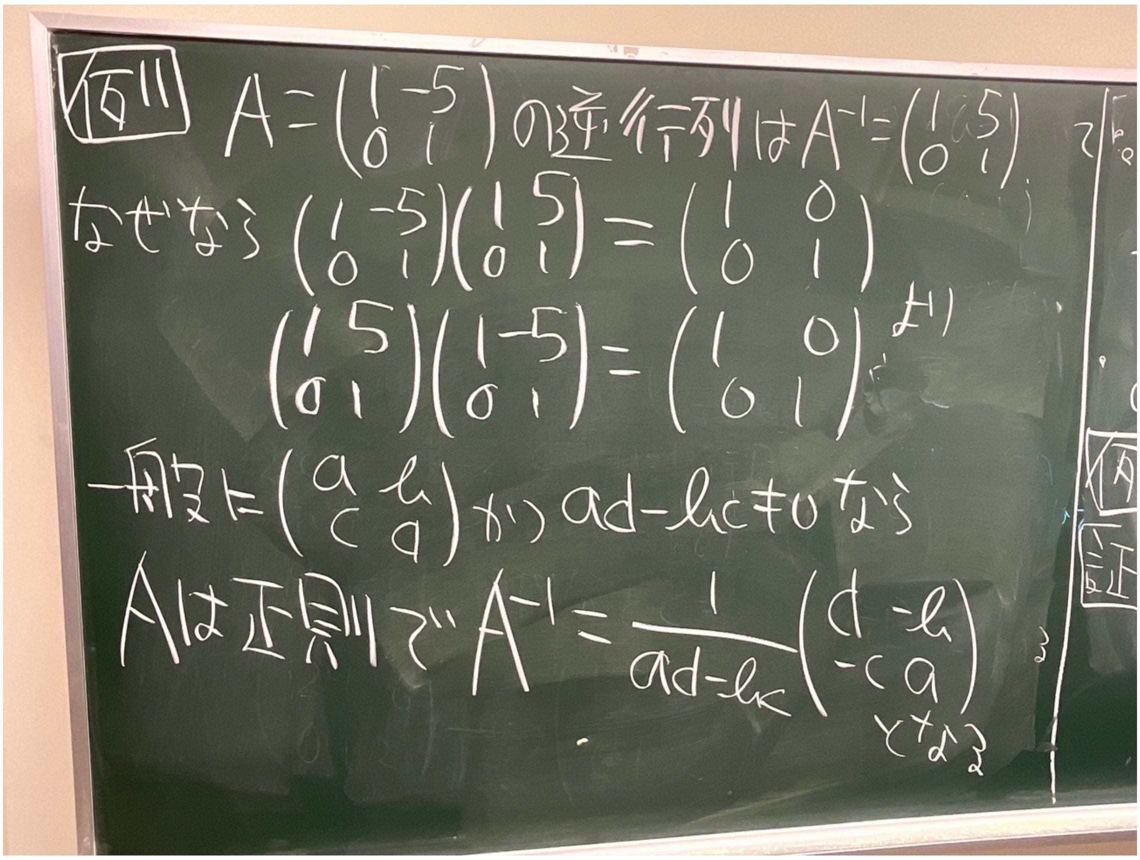
定義 Aを n次正方行列とする

ある行列Bがあって $AB=BA=E_n$ (E_n: 単位行列)

となるとき BをAの逆行列といい $B=A^{-1}$とかく

Aが逆行列A^{-1}をもつとき

Aは正則行列(Aは正則である)という.



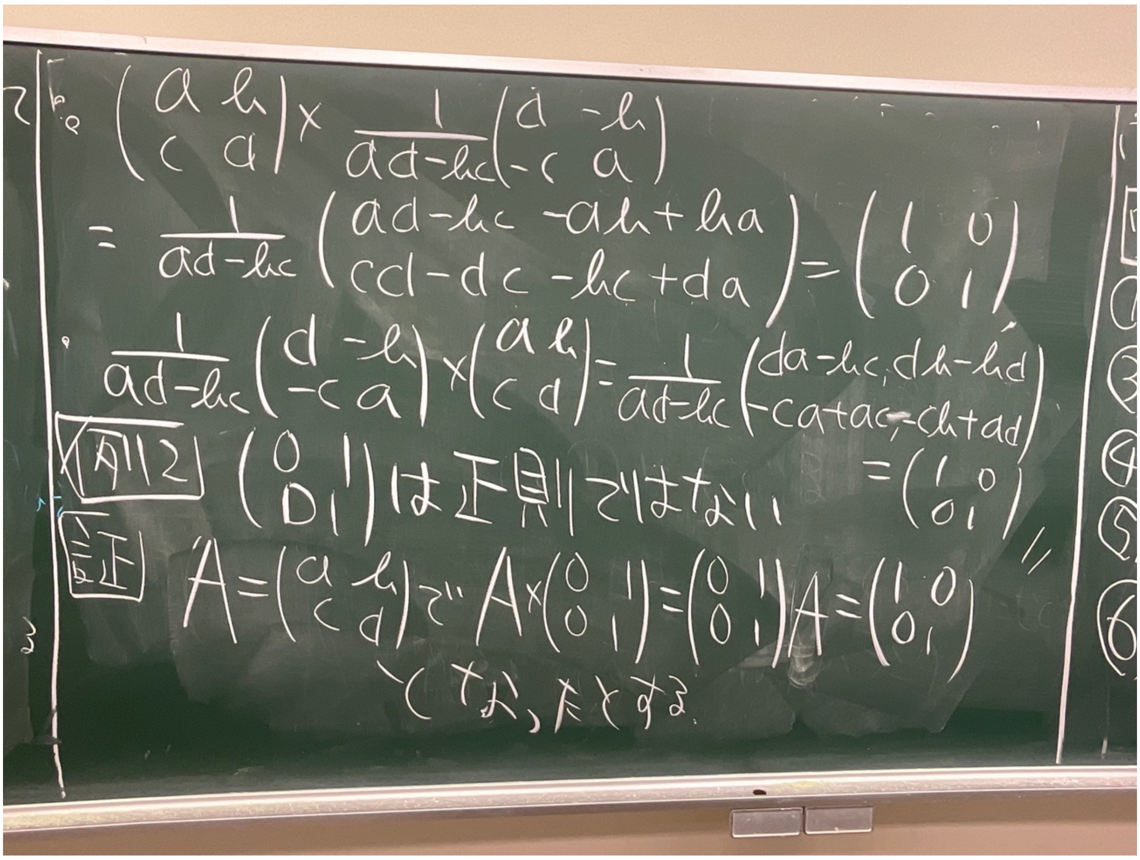
例11 $A=\begin{pmatrix}1&-5\\0&1\end{pmatrix}$ の逆行列は $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}$ で

なぜなら $\begin{pmatrix}1&-5\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-5\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ より

一般に $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ かつ $ad-bc\neq0$ なら

Aは正則で $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$ となる



・$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\times\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

$=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}ad-bc&-ab+ba\\cd-dc&-bc+da\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

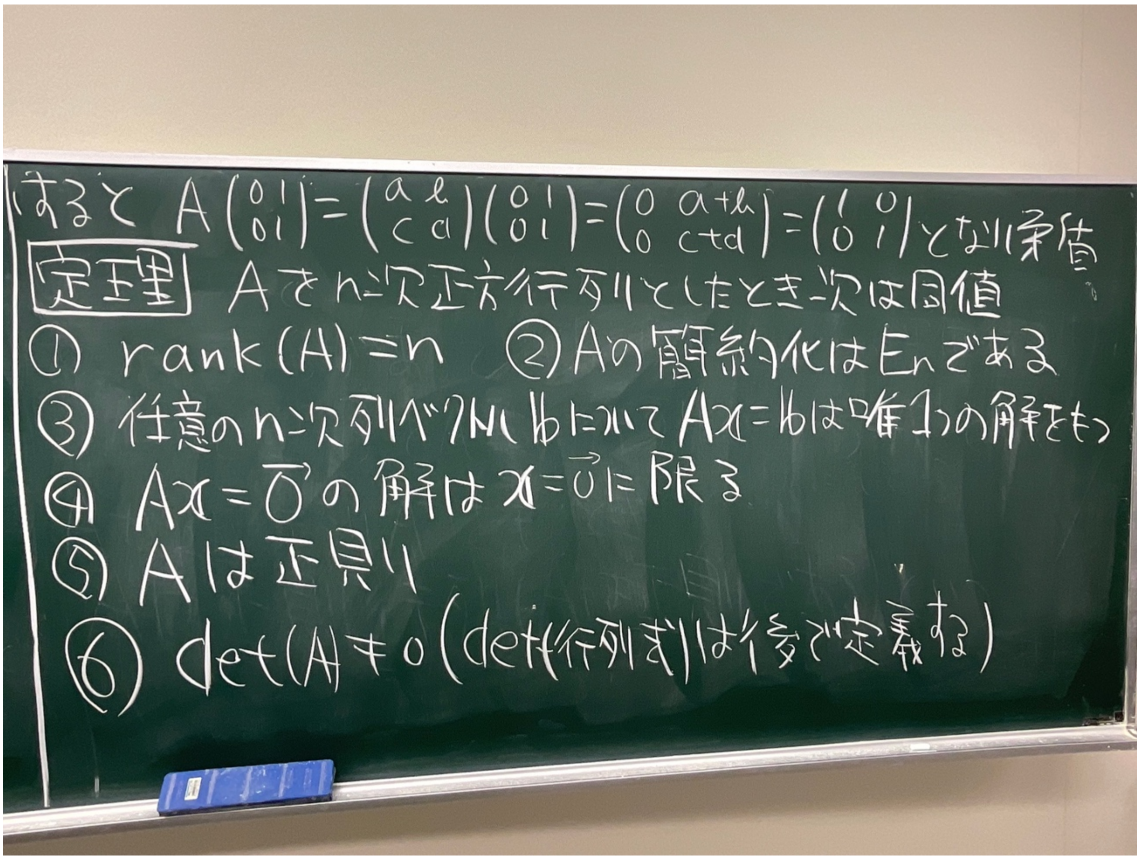
・$\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}da-bc,&db-bd\\-ca+ac,&-cb+ad\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ //

例12 $\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$ は正則ではない

証 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ で $A\times\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

となったとする.



すると $A\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a+b\\0&c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ となり矛盾。

$\boxed{\text{定理}}$ Aをn次正方行列としたとき次は同値

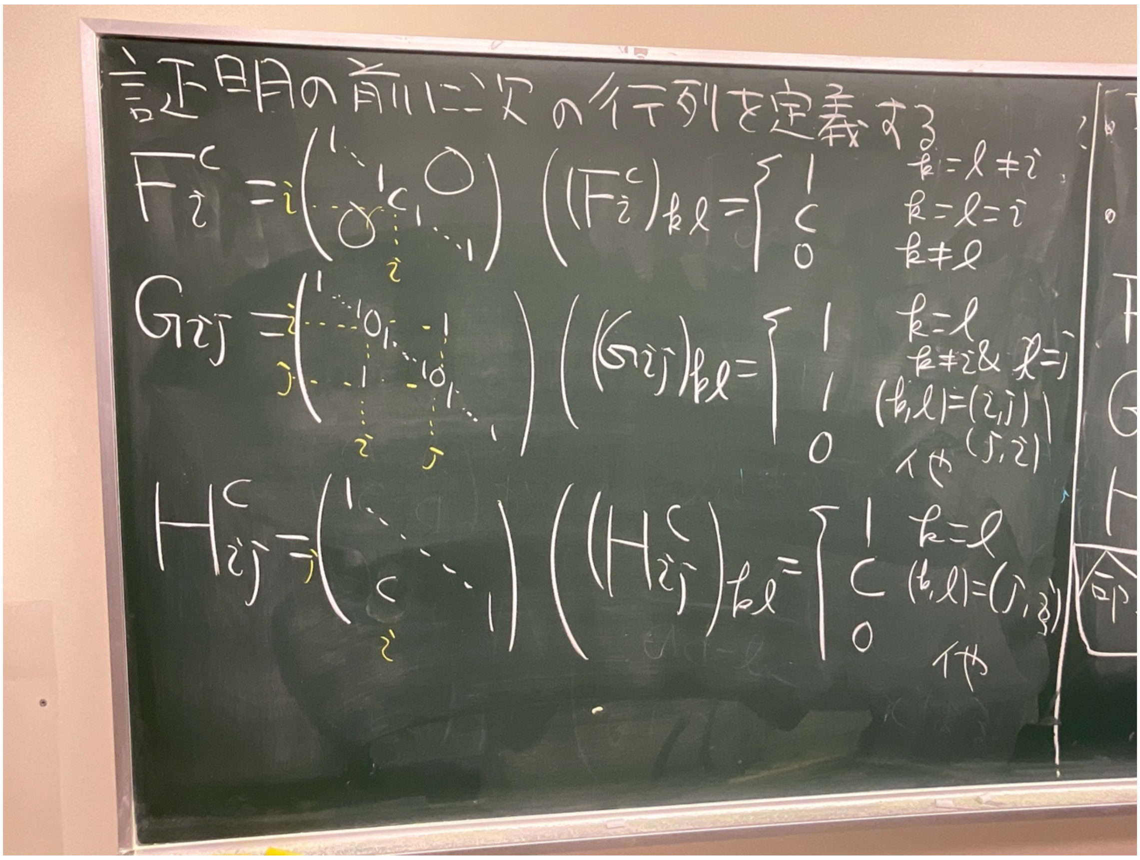
① $\mathrm{rank}(A)=n$　② Aの簡約化はE_nである

③ 任意のn次列ベクトルbについて$Ax=b$は唯1つの解をもつ

④ $Ax=\vec{0}$の解は$x=\vec{0}$に限る

⑤ Aは正則

⑥ $\det(A)\neq 0$ (det(行列式)は後で定義する)

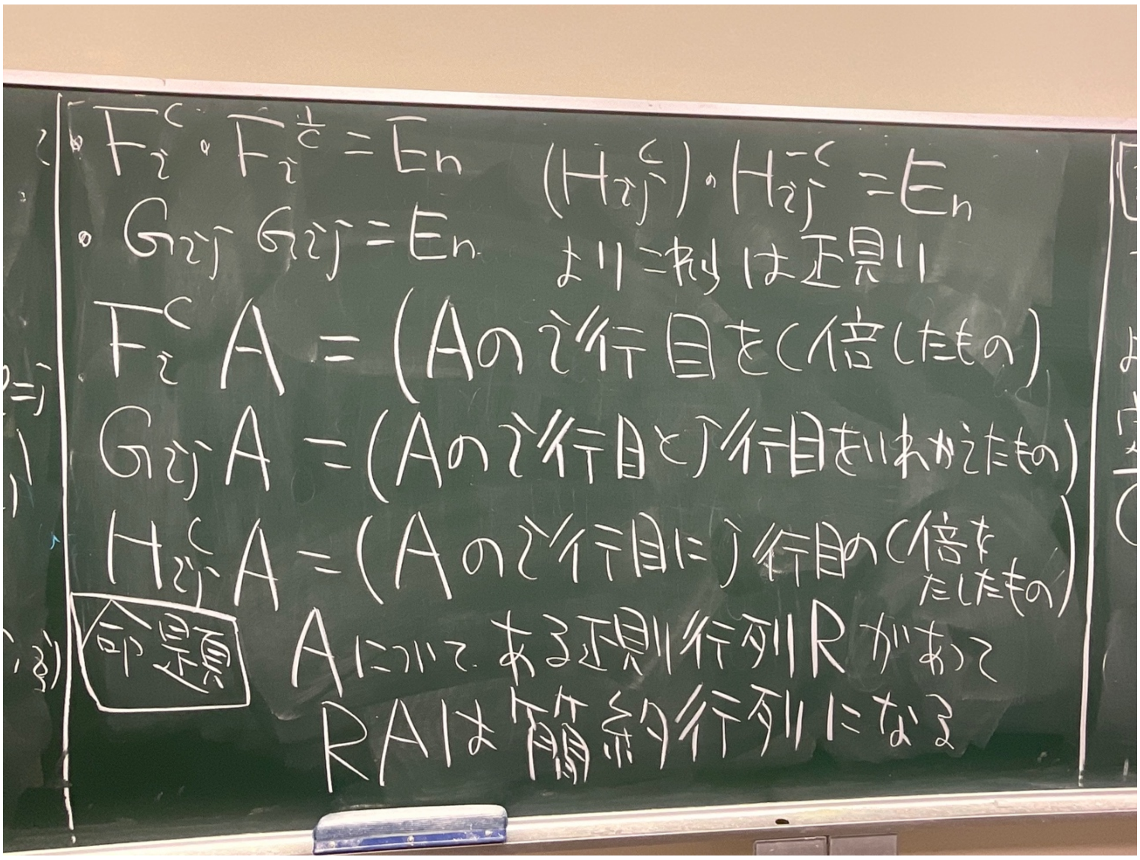


証明の前に次の行列を定義する

$$F_i^c = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & c & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix} \quad \left((F_i^c)_{kl} = \begin{cases}1 & k=l\neq i \\ c & k=l=i \\ 0 & k\neq l\end{cases}\right)$$

$$G_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & \ddots \; 1\end{pmatrix} \quad \left((G_{ij})_{kl} = \begin{cases}1 & k=l \\ & k\neq i \,\&\, l\neq j \\ 1 & (k,l)=(i,j) \\ & (j,i) \\ 0 & \text{他}\end{cases}\right)$$

$$H_{ij}^c = j\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ c & & 1\end{pmatrix} \quad \left((H_{ij}^c)_{kl} = \begin{cases}1 & k=l \\ c & (k,l)=(j,i) \\ 0 & \text{他}\end{cases}\right)$$
$\quad\quad\quad\quad\, i$



・$F_i^c \cdot F_i^{\frac{1}{c}} = E_n$　$(H_{ij}^c) \cdot H_{ij}^{-c} = E_n$

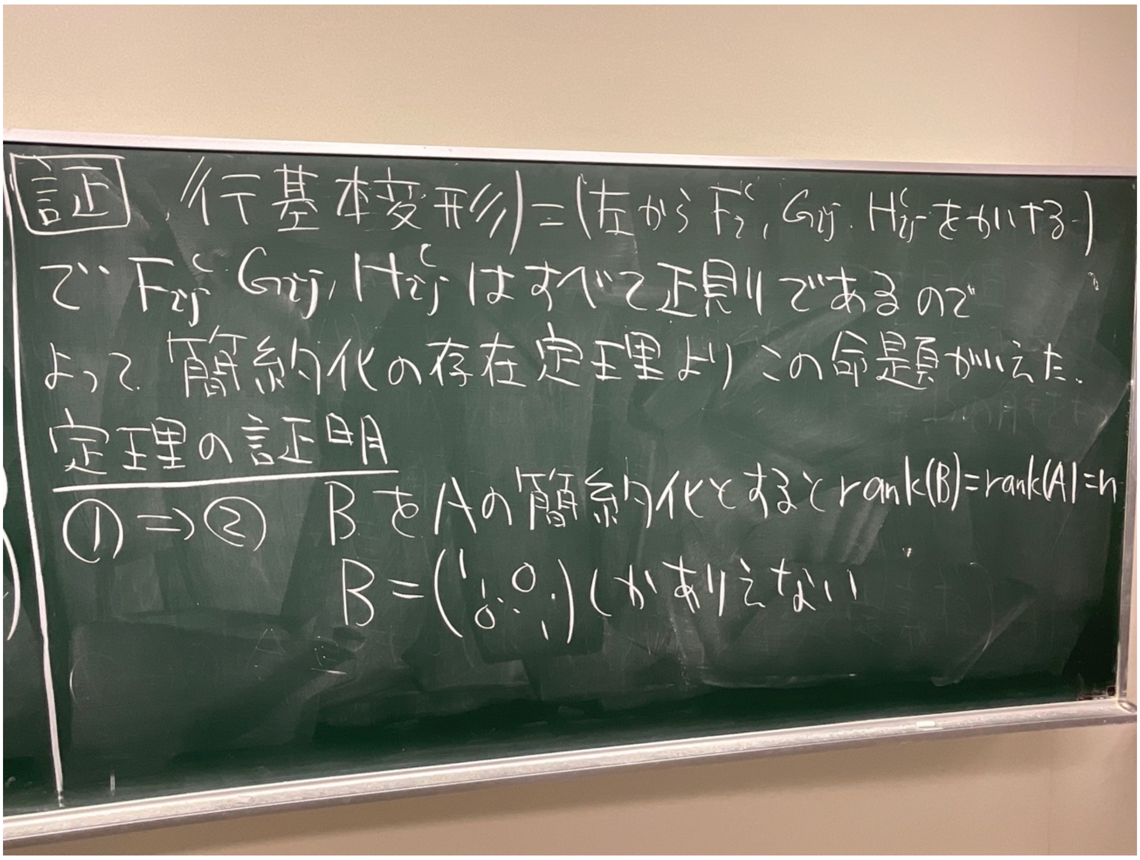
・$G_{ij} G_{ij} = E_n$　よりこれらは正則

$F_i^c A = $ (Aのi行目をc倍したもの)

$G_{ij} A = $ (Aのi行目とj行目をいれかえたもの)

$H_{ij}^c A = $ (Aのi行目にj行目のc倍をたしたもの)

命題 Aについて、ある正則行列Rがあって
RAは簡約行列になる

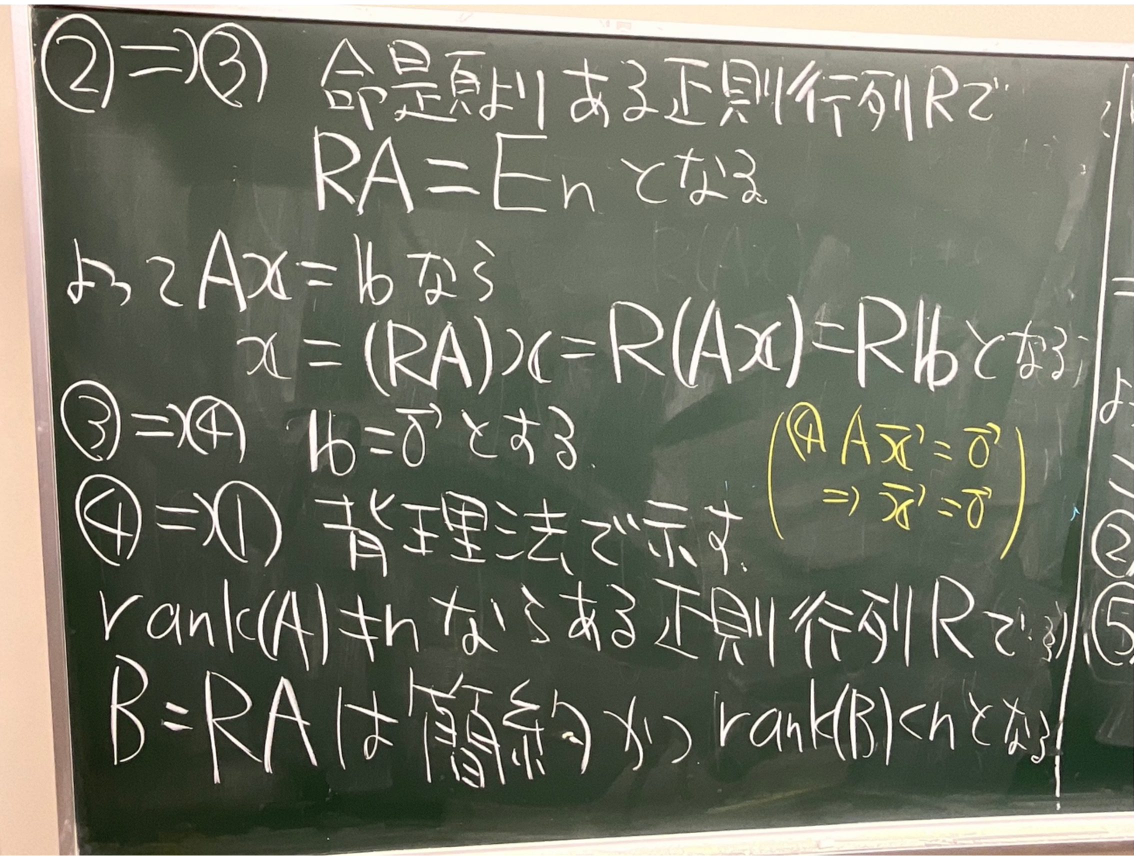


証 (行基本変形)=(左からF_i^c, G_{ij}. H_{ij}^cをかける)
で F_{ij}^c G_{ij}, H_{ij}^c はすべて正則であるので
よって簡約化の存在定理よりこの命題がいえた。

定理の証明

① ⇒ ②　Bを Aの簡約化とすると rank(B)=rank(A)=n

$B = \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$ しかありえない



②⇒③ 命題より ある正則行列Rで

$RA=E_n$ となる

よって$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ なら

$\boldsymbol{x}=(RA)\boldsymbol{x}=R(A\boldsymbol{x})=R\boldsymbol{b}$ となる

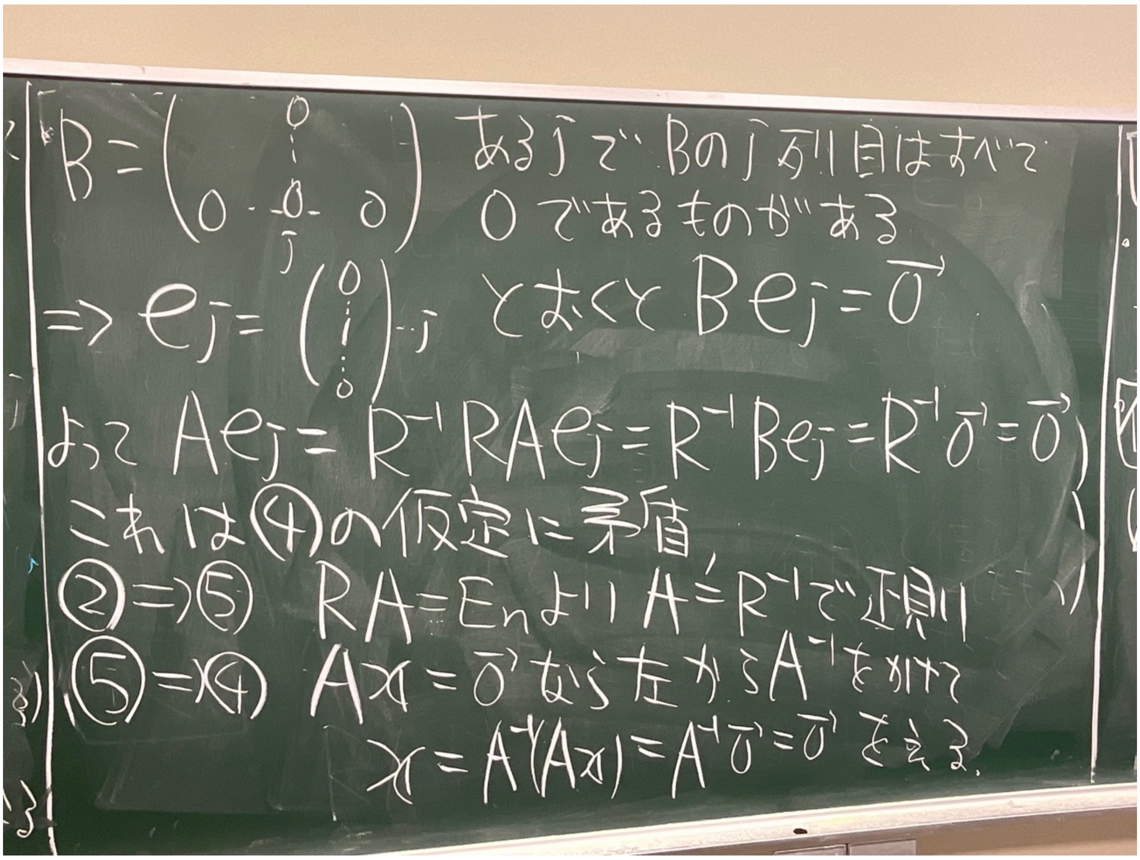
③⇒④ $\boldsymbol{b}=\vec{0}$ とする.

$\left(④\ A\vec{x}'=\vec{0} \Rightarrow \vec{x}'=\vec{0}\right)$

④⇒① 背理法で示す.

$\mathrm{rank}(A)\neq n$ ならある正則行列Rで

$B=RA$ は簡約 かつ $\mathrm{rank}(B)<n$ となる



$$B=\begin{pmatrix} & 0 & \\ & \vdots & \\ 0\cdots & \underset{j}{0} & \cdots 0 \end{pmatrix}$$ あるjで Bのj列目はすべて0であるものがある

$\Rightarrow e_j=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\cdots j$ とおくと $Be_j=\vec{0}$

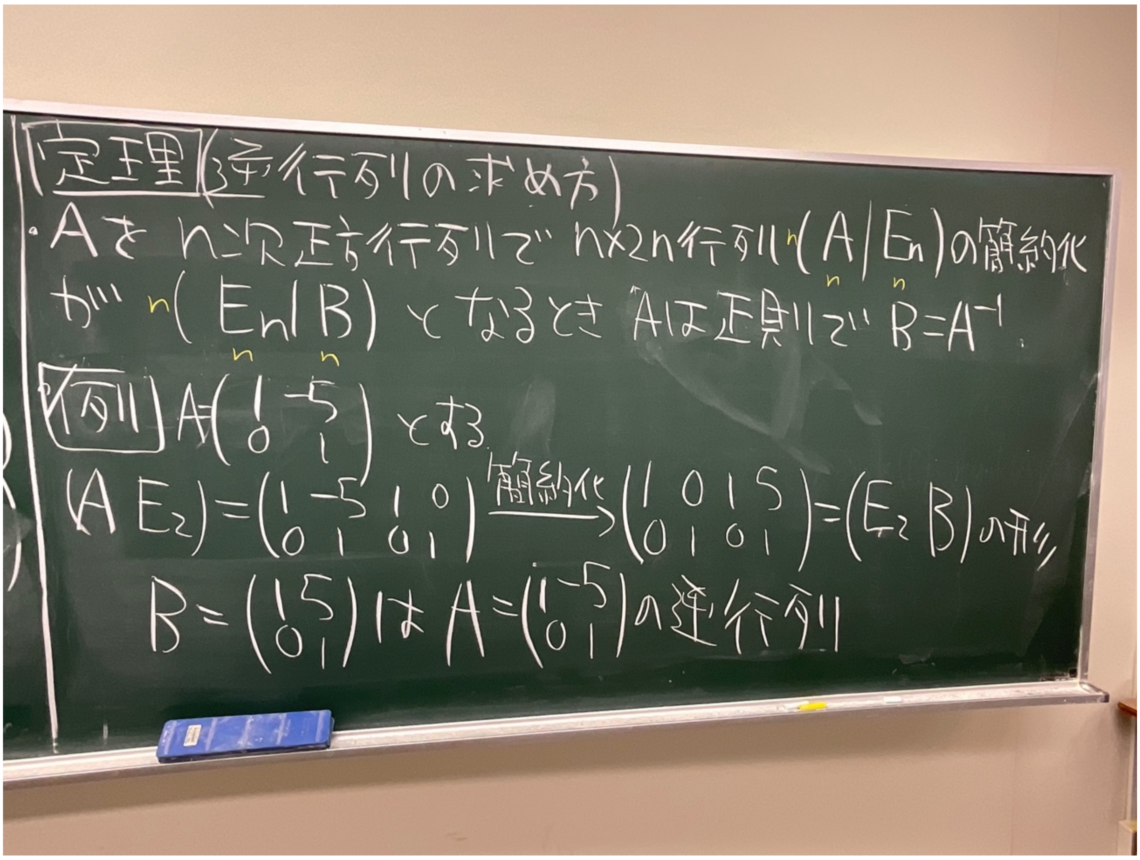
よって $Ae_j=R^{-1}RAe_j=R^{-1}Be_j=R^{-1}\vec{0}=\vec{0}$

これは④の仮定に矛盾

②⇒⑤ $RA=E_n$ より $A=R^{-1}$で正則

⑤⇒④ $A\boldsymbol{x}=\vec{0}$ なら左からA^{-1}をかけて

$\boldsymbol{x}=A^{-1}(A\boldsymbol{x})=A^{-1}\vec{0}=\vec{0}$ をえる.



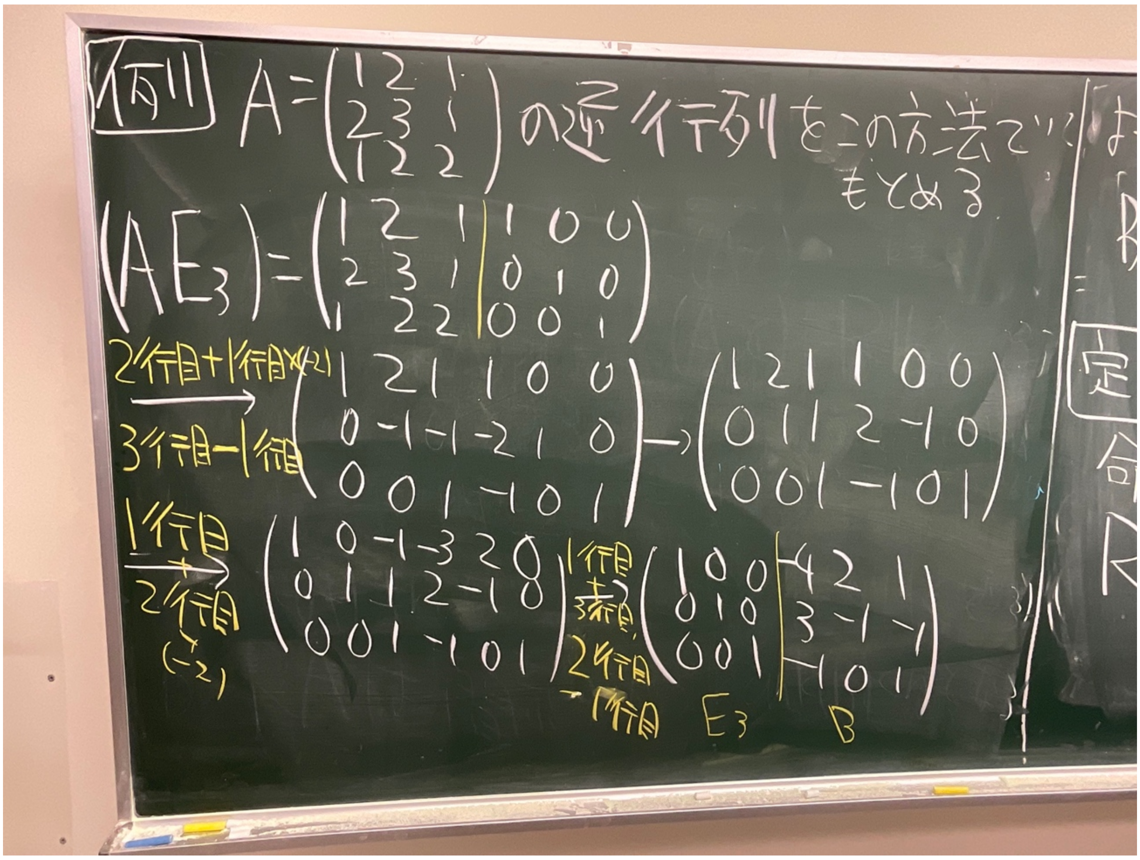
定理（逆行列の求め方）

・Aを n次正方行列で n×2n 行列 $n(\underset{n}{A}|\underset{n}{E_n})$ の簡約化が $n(\underset{n}{E_n}|\underset{n}{B})$ となるとき Aは正則で $B=A^{-1}$.

例 $A=\begin{pmatrix}1&-5\\0&1\end{pmatrix}$ とする.

$$(A\ E_2)=\begin{pmatrix}1&-5&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{簡約化}}\begin{pmatrix}1&0&1&5\\0&1&0&1\end{pmatrix}=(E_2\ B)\text{の形}$$

$B=\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}$ は $A=\begin{pmatrix}1&-5\\0&1\end{pmatrix}$ の逆行列



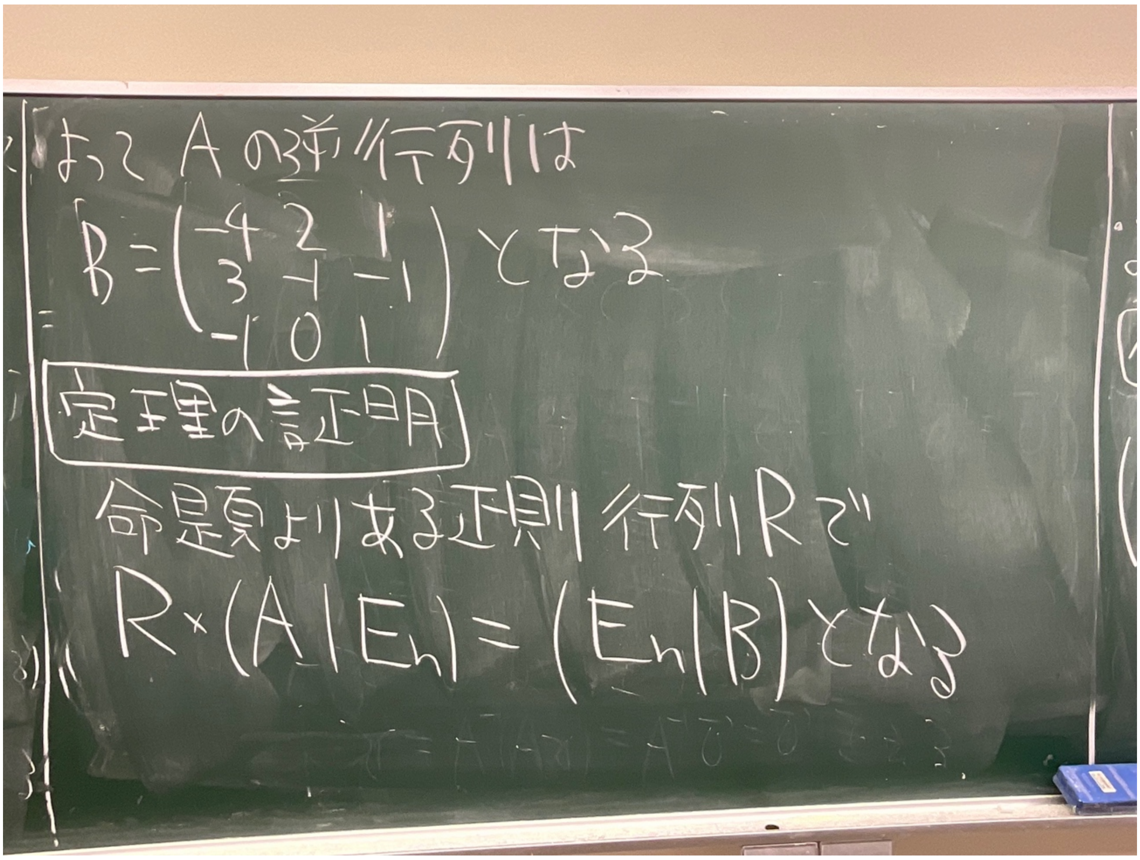
例 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}$ の逆行列をこの方法でもとめる.

$$(A E_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\2&3&1&0&1&0\\1&2&2&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{3行目}-\text{1行目}]{\text{2行目}+\text{1行目}\times(-2)}\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&0\\0&1&1&2&-1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{2行目}\times(-2)]{\text{1行目}+}\begin{pmatrix}1&0&-1&-3&2&0\\0&1&1&2&-1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{2行目}-\text{1行目}]{\text{1行目}+\text{3行目},}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-4&2&1\\0&1&0&3&-1&-1\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)$$

E_3　　B



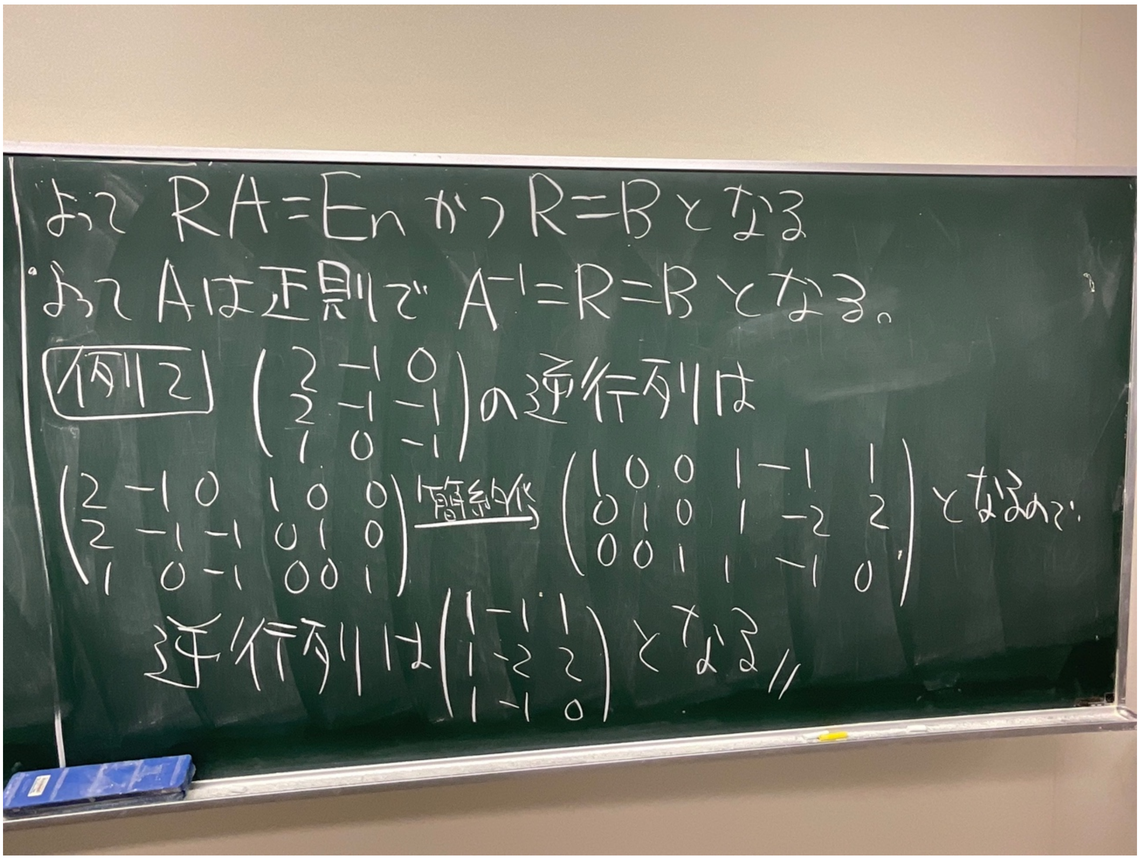
よって Aの逆行列は

$B=\begin{pmatrix}-4&2&1\\3&-1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$ となる

$\boxed{\text{定理の証明}}$

命題よりある正則行列Rで

$R\times(A|E_n)=(E_n|B)$ となる



よって $RA=E_n$ かつ $R=B$ となる

よってAは正則で $A^{-1}=R=B$ となる。

$\boxed{\text{例12}}$ $\begin{pmatrix}2&-1&0\\2&-1&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}$ の逆行列は

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-1&0&1&0&0\\2&-1&-1&0&1&0\\1&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{簡約化}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&1\\0&1&0&1&-2&2\\0&0&1&1&-1&0\end{array}\right)$ となるので

逆行列は $\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$ となる//