前回 行基本変形

① 1つの行をa倍する (a≠0)　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

② 2つの行をいれかえる　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

③ 1つの行に他の行のa倍をかえる　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

簡約行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

簡約化

$$A \xrightarrow[\text{基本変形}]{} \text{簡約行列}$$

Aから唯1つに定まる

定義

AをOK行列とし、BをAの簡約化とする

rank(A)をBのゼロベクトルでない行のこすうとしAの階数(ランク)という。

例

$$A = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

簡約行列

← ゼロベクトル

$\mathrm{rank}(A) = 2$

$$B = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

簡約　$\mathrm{rank}(B) = 3$

例 $C=\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&1&1\end{pmatrix}$ rank C = 2

$$\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{1行目\\ \times(-1)をたす}]{③\ 2行目} \begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&4\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{2行目\\(-1)倍}]{②} \begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&-4\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{2行目\times(-2)\\をたす}]{③\ 1行目に} \begin{pmatrix}1&0&5\\0&1&-4\end{pmatrix}$$

簡約

例

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1\\2&1&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{1行目\times(-2)\\たす}]{③\ 2行目に} \begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-3&-2\\0&1&1&0\end{pmatrix}$$

→0にしたい

$$\xrightarrow[\substack{2行目\times(-1)を\\たす}]{③\ 3行目に} \begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-3&-2\\0&0&4&2\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{3行目\\ \times\frac{1}{4}}]{①} \begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-3&-2\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

→1にしたい

$$\xrightarrow[2行目+3行目\times3]{1行目+3行目\times(-2)} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

簡約。階数 3

命題 A m×n行列なら $\mathrm{rank}(A)\leqq\min(m,n)$

(証明) 簡約化 B =

$$\begin{array}{c|c} & b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \cdots \quad b_r \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\ \vdots\\ r\end{matrix} & \begin{pmatrix}1 & & & & ? \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

$r=\mathrm{rank}(A)$

$r\leqq m$ (行のこすうは高々mこより)

一方 $b_1<b_2<\cdots<b_r\leqq n$ より $r\leqq n$ となる

$\boxed{\text{例}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ の階数を求める

基本変形を用いて簡約化していく.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{4行目}+\text{1行目}\times(-2)]{\text{3行目}+\text{1行目}\times 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0にしたい

0にしたい

$$\xrightarrow{\text{4行目}+\text{2行目}\times(-1)} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 簡約行列。

階数 $=3$

2.3 連立1次方程式を解く

$$☆\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

n変数
m式連立方程式

係数行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

拡大係数行列 $[A \vdots \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

連立1次方程式は簡約化を用いて求められる。
(掃き出し法、ガウスの消去法)

手順1 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ から拡大係数行列をつくる

手順2 $[A \vdots \mathbf{b}]$ を基本変形で簡約化する
それを $[C \vdots \vec{d}]$ とする

手順3 $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ をとく
(かなりときやすい形になっている)

例
$$\begin{cases} x_1+2x_2=2 \\ 2x_1+4x_2=4 \end{cases}$$ を解く

① 拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ となる

② これを簡約化する $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2行+1行\times(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ C d

③ $Cx=d$ をとく、つまり $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとく

つまり $\begin{cases} x_1+2x_2=2 \\ 0x_1+0x_2=0 \end{cases}$ をとく

答 $x_1=2-2t$, $x_2=t$ (t 実数)

例2
$$\begin{cases} x_1+2x_2=2 \\ 2x_1+4x_2=5 \end{cases}$$ を解く

① 拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

② これを簡約化する $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ C d

③ $Cx=d$ をとく つまり $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとく

つまり $\begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ \boxed{0x_1+0x_2=1} \end{cases}$ をとく.

$0=1$

答 解なし

例 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$ を解く

① 拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

② これを簡約化すると

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3行目}+\text{1行目}\times(-2)]{\text{2行目}+\text{1行目}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

0にする　　0にする

$$\xrightarrow[\text{2行目}\times(-1)]{\text{3行目}+} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

0にする

$$\xrightarrow[\text{3行目}\times(-1)]{\text{2行目}+} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

C　　d

簡約行列

③ $Cx = d$ をとく。つまり

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をとく

つまり
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = -1 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$
をとく

答
$$\begin{cases} x_1 = 2s - 3t + 2 \\ x_2 = s \\ x_3 = t - 1 \\ x_4 = t \\ x_5 = 1 \end{cases}$$
(s, t 実数)

例
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 + x_5 = -6 \end{cases}$$
を解く

① 拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

② これを簡約化する

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3行目+1行目}]{\text{2行目+1行目×(-2)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

0にする

$$\xrightarrow[\times\left(-\frac{1}{3}\right)]{3\text{行目}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{行目}\times(-1)]{3\text{行目}+} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

0にする

$$\xrightarrow[\times\frac{1}{6}]{3\text{行目}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & \boxed{2} & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \boxed{-5} & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

0にする

$$\xrightarrow[2\text{行目}+3\text{行目}\times 5]{1\text{行目}+3\text{行目}\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

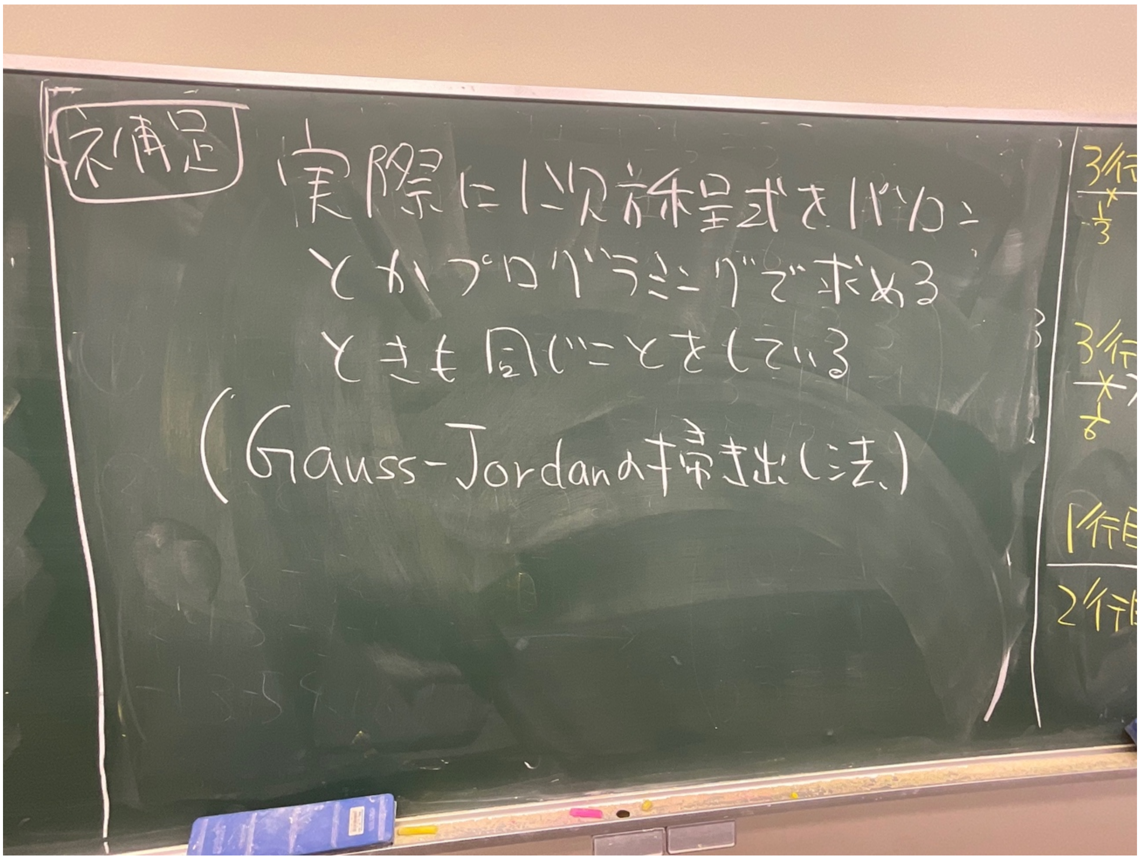
③ $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ をとく

つまり $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_5 = 1 \end{cases}$ をとく

答 $\begin{cases} x_1 = 1 - 2s + t \\ x_2 = -2 + s - t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \\ x_5 = 1 \end{cases}$ (s, t 実数)

補足

(Ga


補足
実際に1次方程式をパソコンとかプログラミングで求めるときも同じことをしている
(Gauss-Jordanの掃き出し法)