2 連立1次方程式

☆ $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + \cdots \quad + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots \quad + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$ 連立1次方程式

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ 係数行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ 拡大係数行列

例 $$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1 基本変形

$\boxed{\text{定義}}$ 行列の次の3つの操作を基本変形という

① 1つの行を a 倍する $(a \neq 0)$

② 2つの行をいれかえる

③ 1つの行に他の行の a 倍をかえる（aは実数 0も可）

$\boxed{\text{補足}}$ → 1次方程式は基本変形をつかってとくことができる

$\boxed{\text{例}}$

① $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1行目} \times \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2行目いれかえ}]{\text{1行目と}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2行目}\times(-1)\text{をかえる}]{\text{1行目に}} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{1}\times\frac{1}{2}]{①} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{2}\text{に}\boxed{1}\times(-3)\text{をたす}]{③} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2行目}\times(-\frac{1}{7})]{①} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

☆ $\begin{cases} 2x+4y=2 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ の拡大系数行列 $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

☆の1行目を$\frac{1}{2}$倍したもの

$$\begin{cases} x+2y=2 \\ 3x-y=1 \end{cases}$$

☆の1行目と2行目いれかえ

$$\begin{cases} 3x-y=1 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$$

☆の1行目に2行目の(−1)倍たした

$$\begin{cases} -x+5y=1 \\ 3x-y=1 \end{cases}$$

拡大系数行列

1行目 $\times\frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1行目と2行目いれかえ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1行目に2行目(−1)倍たす

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2式 $\begin{cases} 2x+4y=2 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ $\left(x=\frac{3}{7}\ \ y=\frac{2}{7}\right)$

↓ 1番目の式$\times\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 3x-y=1 \end{cases}$$

↓ 2番目の式に1番目の式の(−3)倍たす

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ -7y=-2 \end{cases}$$

↓ 2番目の式$\times\left(-\frac{1}{7}\right)$

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ y=\frac{2}{7} \end{cases}$$

拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

① 1行目$\times\frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

③ 2行目+(−3)×1行目

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -2 \end{pmatrix}$$

① 2行目$\times\left(-\frac{1}{7}\right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = \frac{2}{7} \end{cases}$$

1番目に2番目の式×(−2)をたす

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

1行目＋2行目×(−2)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \text{の} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix} \text{について}$$

基本変形して $\begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \end{pmatrix}$ となったら $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$ が解になる

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases} \quad (☆)$$

(☆)への拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\times(\frac{1}{3})]{① \text{ 1行目}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1行目}\times(-5)]{③ \text{ 2行目}+} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

へん形していく

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \end{pmatrix} \text{Goal}$$

$$\xrightarrow[\times(\frac{3}{4})]{① \text{ 2行目}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2行目}\times(-\frac{1}{3})]{③ \text{ 1行目}+} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$\frac{2}{3} + -\frac{1}{3} \times -\frac{1}{4}$

実際 $x_1=\frac{3}{4}$, $x_2=-\frac{1}{4}$ は☆の解となる

$$☆\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

の拡大係数行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$

を基本変形して $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{pmatrix}$ になったとき

$\begin{cases} x_1=c_1 \\ x_2=c_2 \\ x_3=c_3 \end{cases}$ が☆の解となる（プリント例1,3,4参照）

$\boxed{例1}$ $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=4 \\ -x_1+2x_2-4x_3=-2 \end{cases}$ を解く。拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

これを基本変形していって $\left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix}\right)$ の形になれば

$x_1=c_1, x_2=c_2, x_3=c_3$ が解になる

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1行目}\times(-2)]{\text{2行目}+} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1行目}\times(1)]{\text{3行目}+} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}
\xrightarrow[(-1)]{2\text{行目}\times}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}
\xrightarrow[2\text{行目}\times(-1)]{1\text{行目}+}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}
$$

3行目 + 2行目 × (−3)

$$
\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 & 3 \\ -5 & -2 \\ 10 & 5 \end{matrix} \end{pmatrix}
\xrightarrow[(\frac{1}{10})]{3\text{行目}\times}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

1行目 + 3行目 × (−4)

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\xrightarrow[3\text{行目}\times 5]{2\text{行目}+}
\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix}} \end{pmatrix}
$$

よって解は $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$ となる

検算

$$
\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1 + \frac{2}{2} - \frac{4}{2} = -2 \end{cases}
$$

結局 連立1次方程式は拡大係数行列を基本変形で

これってなんに?

$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & & & c_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & c_n \end{pmatrix}}$ の形にしたらとける.

2.2 簡約な行列 ((⋯ c_n) みたいなやつ)

定義 主成分

行列において、それぞれの行の最初に現れる0でない成分を主成分という

例

$$\begin{array}{c} 1行 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

○ 主成分

定義 次の4つを満たす行列を簡約行列という

① 全ての成分が0である行は 0以外の値をもつ行よりも下側にある　(0, … 0) は下にある

② 主成分すべて1

③ 右側の列にいくほど主成分も右側にある
(主成分の階段ができる)

④ 主成分を持つ列はその主成分以外は0

例

○ 主成分

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

① ok　② ok　③ ok　④ ok

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ok　ok　ok　ok

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ok　ok　ok　ok

簡約行列

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

①がダメ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

②がダメ

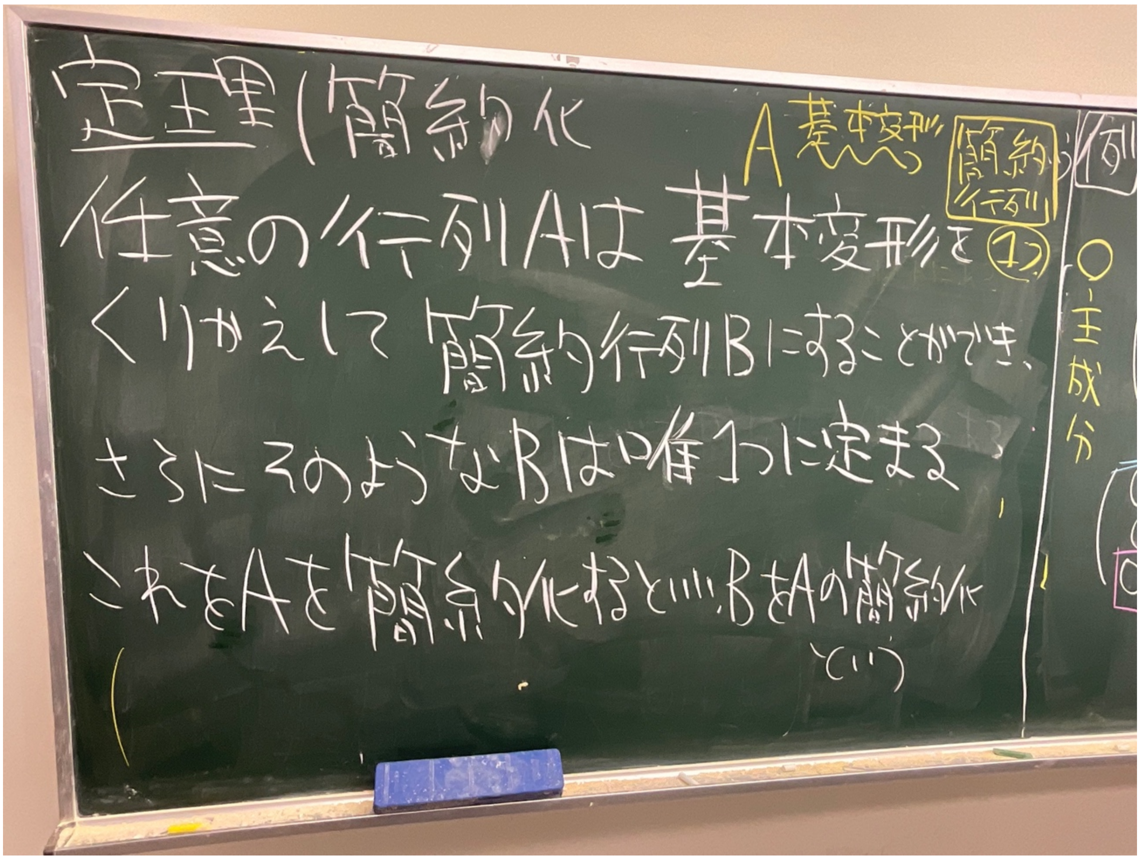
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

③ダメ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

④ダメ

簡約ではない


定理 (簡約化)
任意の行列Aは基本変形をくりかえして簡約行列Bにすることができ、
さらにそのようなBは唯1つに定まる
これをAを簡約化するといい、BをAの簡約化という
A 基本変形 簡約行列
1つ
主成分