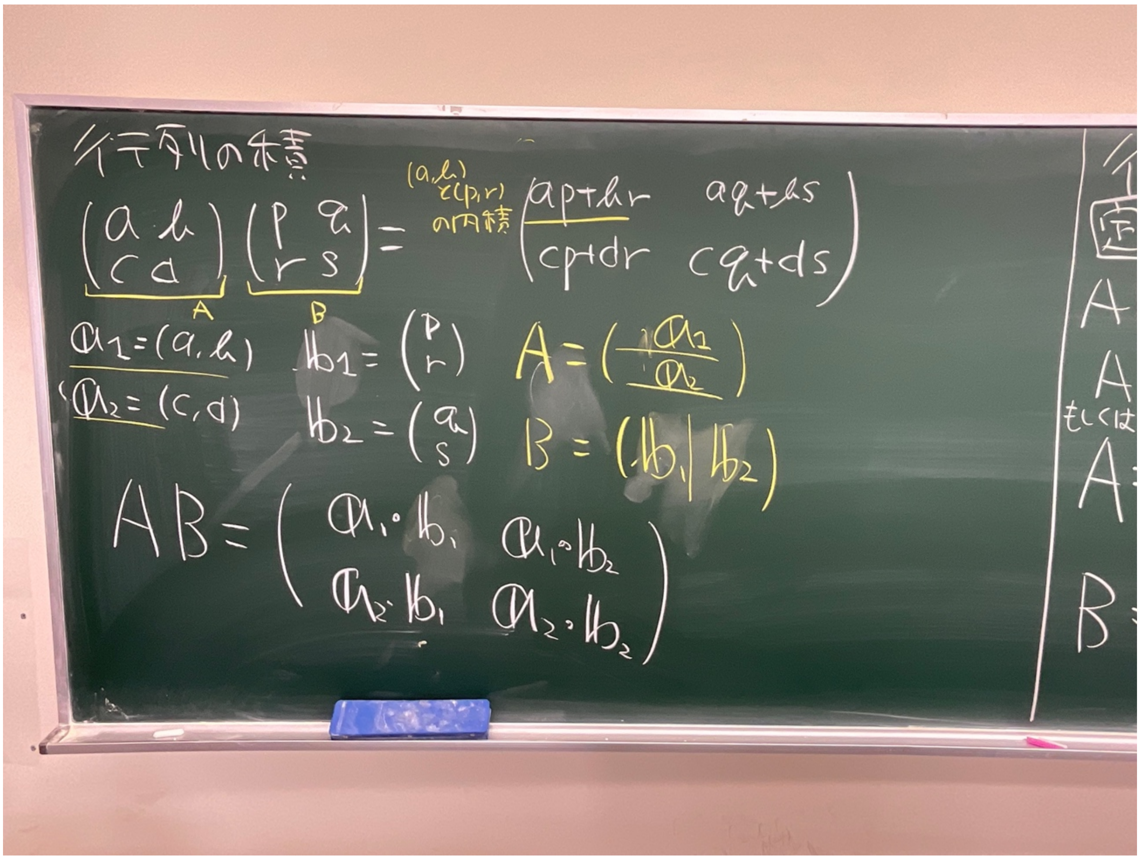


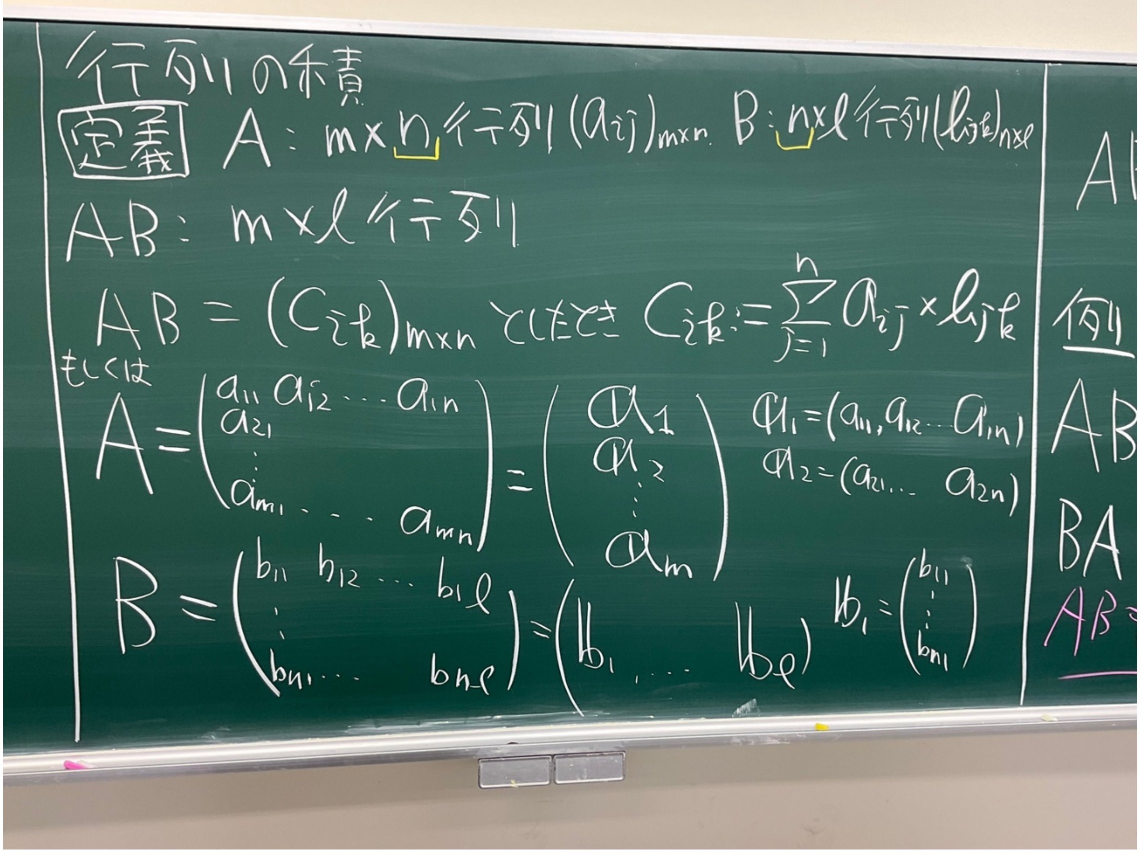
行列の積

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}}_{B} = \overset{(a,b)\text{と}(p,r)\text{の内積}}{} \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

$\mathbf{a}_1 = (a, b)$ $\quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \hline \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{a}_2 = (c, d)$ $\quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$ $\quad B = (\mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_2)$

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$$



行列の積

$\boxed{\text{定義}}$ $A : m \times \underbrace{n}$ 行列 $(a_{ij})_{m\times n}$ $\quad B : \underbrace{n} \times l$ 行列 $(b_{jk})_{n\times l}$

$AB : m \times l$ 行列

$AB = (c_{ik})_{m\times n}$ としたとき $c_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times b_{jk}$

もしくは

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12} \cdots a_{1n}) \\ \mathbf{a}_2 = (a_{21} \cdots \ a_{2n}) \end{matrix}$$

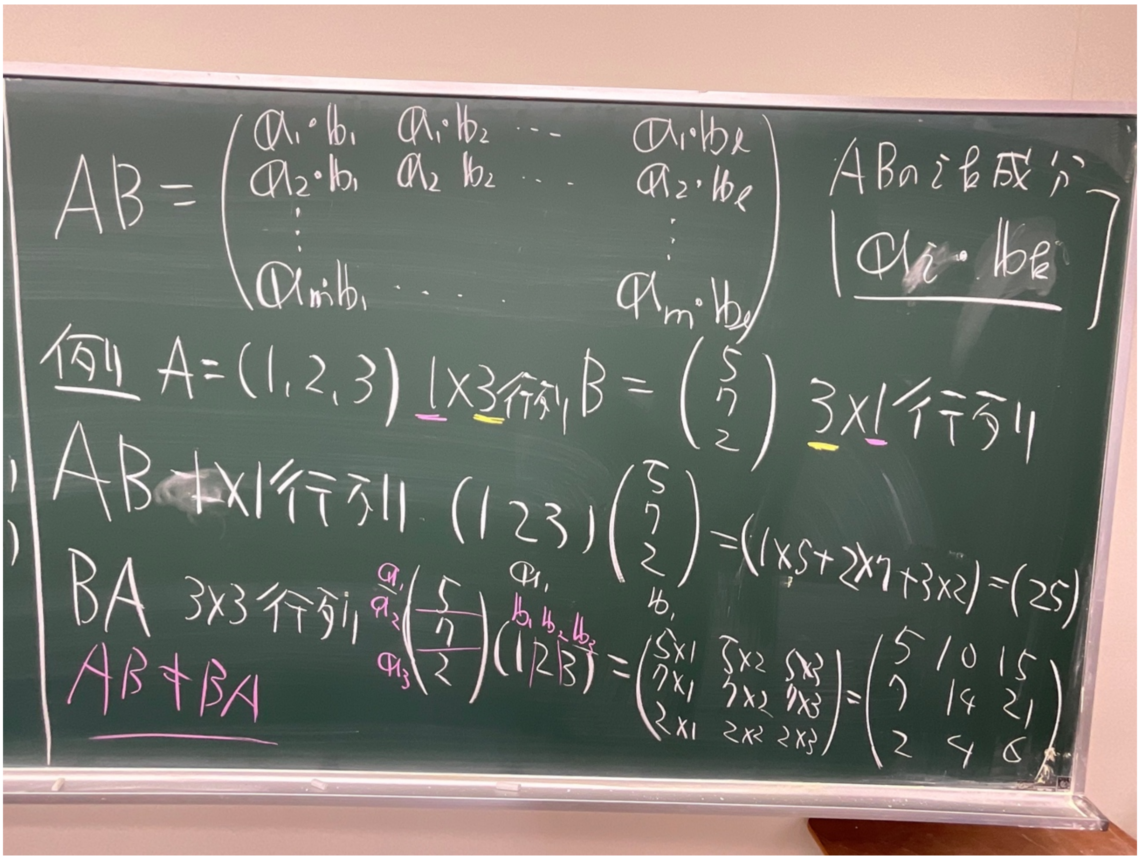
$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & \cdots & & b_{nl} \end{pmatrix} = (\mathbf{b}_1 \ , \cdots \ \mathbf{b}_l) \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

例

AB

BA

AB



$$AB = \begin{pmatrix} a_1\cdot b_1 & a_1\cdot b_2 & \cdots & a_1\cdot b_\ell \\ a_2\cdot b_1 & a_2\ b_2 & \cdots & a_2\cdot b_\ell \\ \vdots & & & \vdots \\ a_m\cdot b_1 & \cdots & & a_m\cdot b_\ell \end{pmatrix}$$

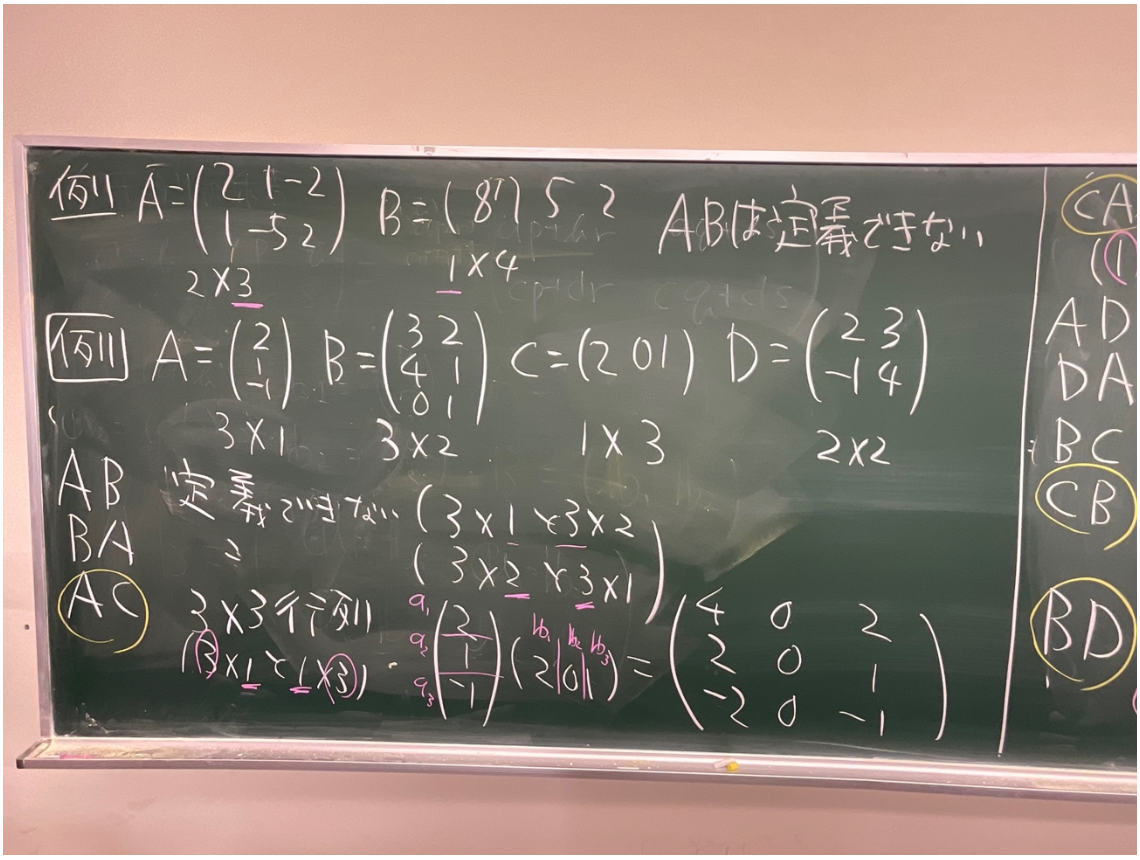
ABのik成分 $\left[\ \underline{a_i\cdot b_k}\ \right]$

例 $A=(1,2,3)$ $\underline{1}\times\underline{3}$行列, $B=\begin{pmatrix}5\\7\\2\end{pmatrix}$ $\underline{3}\times\underline{1}$行列

AB 1×1行列 $(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix}5\\7\\2\end{pmatrix}=(1\times5+2\times7+3\times2)=(25)$

BA 3×3行列 $\begin{array}{c}a_1\\a_2\\a_3\end{array}\begin{pmatrix}5\\7\\2\end{pmatrix}\begin{array}{c}b_1\ b_2\ b_3\\(1\,|\,2\,|\,3)\end{array}=\begin{pmatrix}5\times1 & 5\times2 & 5\times3\\7\times1 & 7\times2 & 7\times3\\2\times1 & 2\times2 & 2\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10 & 15\\7 & 14 & 21\\2 & 4 & 6\end{pmatrix}$

$\underline{AB \neq BA}$



例 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\1 & -5 & 2\end{pmatrix}$ $2\times\underline{3}$ $B=(8\ 7\ 5\ 2)$ $\underline{1}\times4$ ABは定義できない

$\boxed{例}$ $A=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\4 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ $C=(2\ 0\ 1)$ $D=\begin{pmatrix}2 & 3\\-1 & 4\end{pmatrix}$

3×1 3×2 1×3 2×2

AB 定義できない ($3\times\underline{1}$ と $\underline{3}\times2$

BA 〃 ($3\times\underline{2}$ と $\underline{3}\times1$)

AC 3×3行列

($3\times\underline{1}$ と $\underline{1}\times3$) $\begin{array}{c}a_1\\a_2\\a_3\end{array}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{array}{c}b_1\ b_2\ b_3\\(2\,|\,0\,|\,1)\end{array}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\2 & 0 & 1\\-2 & 0 & -1\end{pmatrix}$

CA

(1

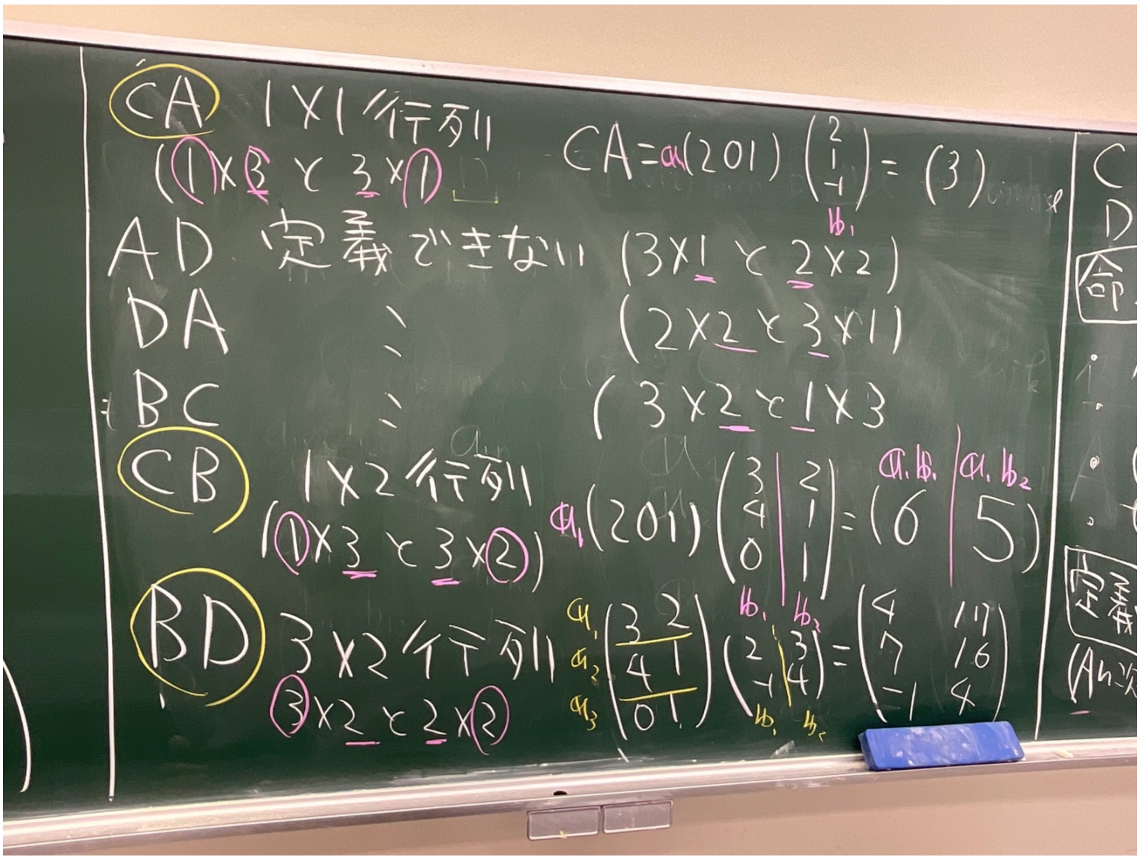
AD

DA

BC

CB

BD



CA　1×1 行列
（$①\times\underline{3}$ と $\underline{3}\times①$）

$CA = a_1(2\ 0\ 1)\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}_{b_1} = (3)$

AD　定義できない　（$3\times\underline{1}$ と $\underline{2}\times2$）

DA　〃　（$2\times\underline{2}$ と $\underline{3}\times1$）

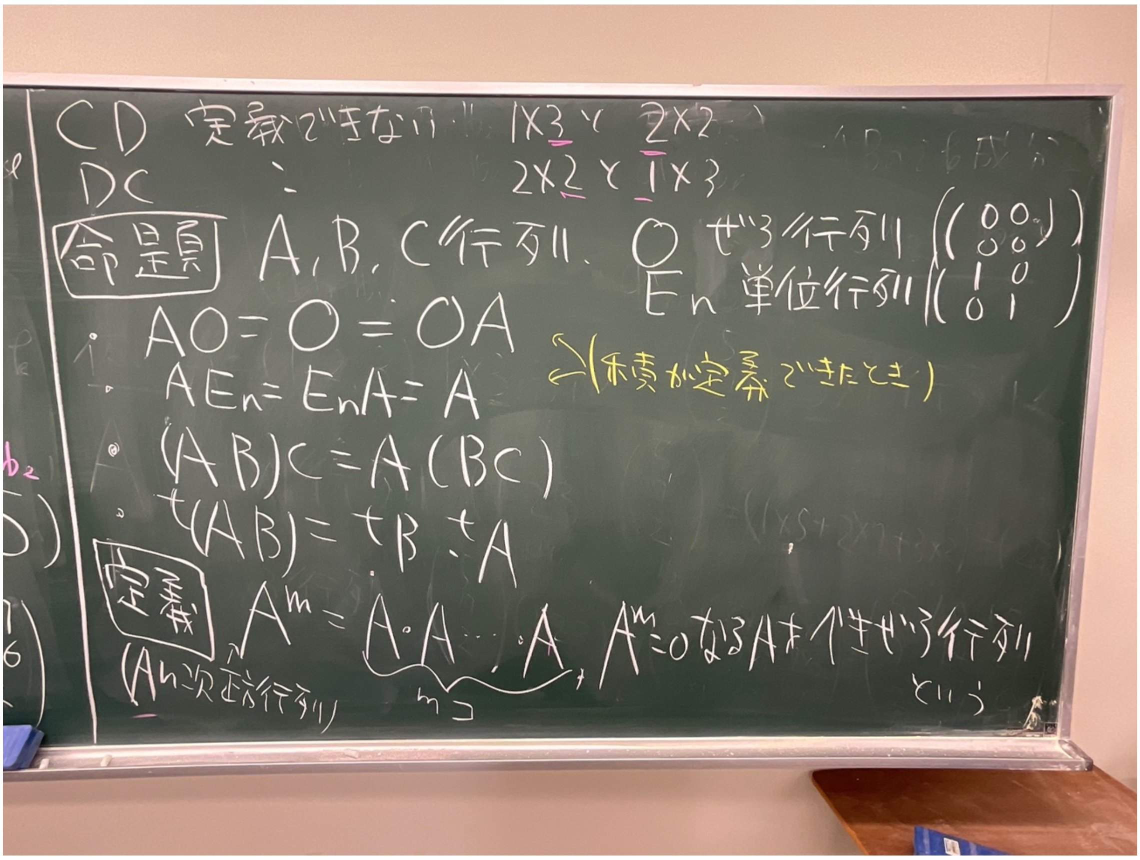
BC　〃　（$3\times\underline{2}$ と $\underline{1}\times3$

CB　1×2 行列
（$①\times\underline{3}$ と $\underline{3}\times②$）

$$a_1(2\ 0\ 1)\left(\begin{array}{c|c}3&2\\4&1\\0&1\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c}a_1b_1&a_1b_2\\6&5\end{array}\right)$$

BD　3×2 行列
（$③\times\underline{2}$ と $\underline{2}\times②$）

$$\begin{array}{c}a_1\\a_2\\a_3\end{array}\begin{pmatrix}3&2\\4&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\-1&4\end{pmatrix}_{b_1\ b_2} = \begin{pmatrix}4&17\\7&16\\-1&4\end{pmatrix}$$



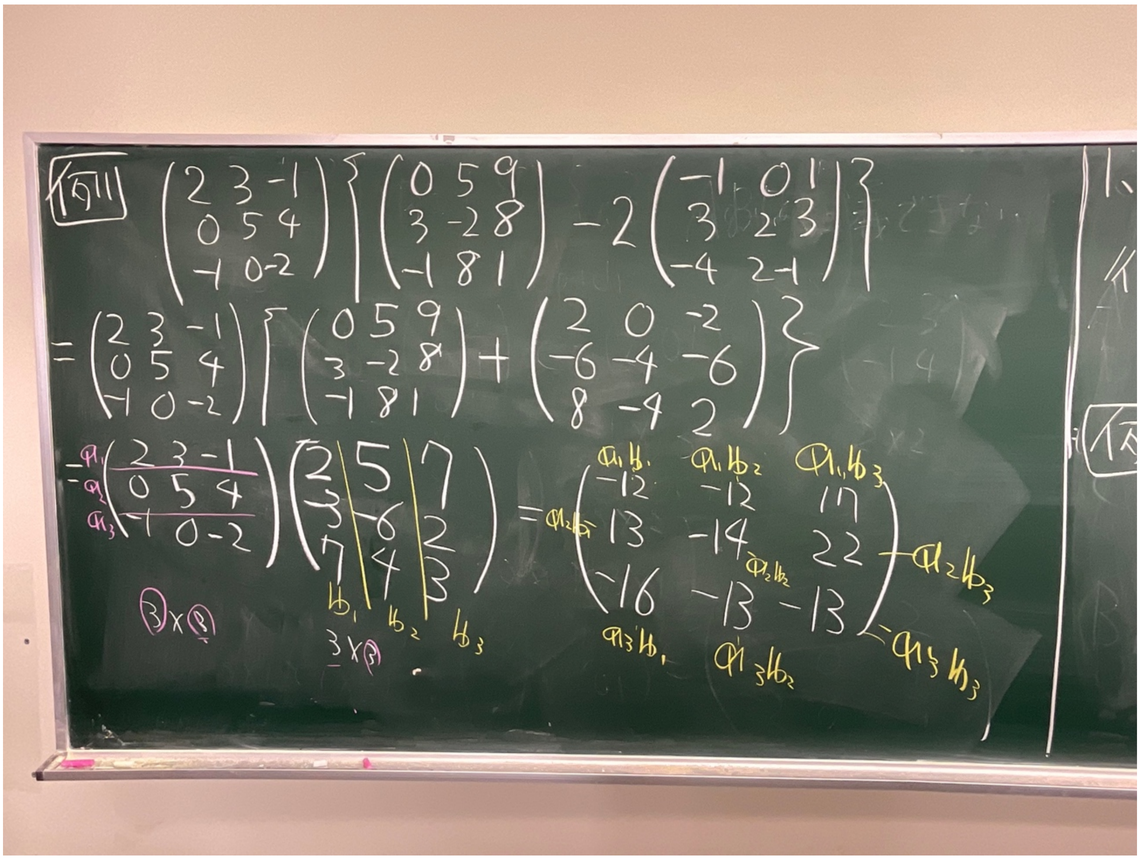
CD　定義できない　（$1\times\underline{3}$ と $\underline{2}\times2$）

DC　〃　$2\times\underline{2}$ と $\underline{1}\times3$

命題　A, B, C 行列、　O ぜろ行列 $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$
E_n 単位行列 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

- $AO = O = OA$
- $AE_n = E_nA = A$　←（積が定義できたとき）
- $(AB)C = A(BC)$
- ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

定義　$A^m = \underbrace{A\cdot A\cdots A}_{m\text{コ}}$，$A^m = O$ なるAをべきぜろ行列という
（A n次正方行列）



例 $\begin{pmatrix}2&3&-1\\0&5&4\\-1&0&-2\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}0&5&9\\3&-2&8\\-1&8&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&2&3\\-4&2&-1\end{pmatrix}\right\}$

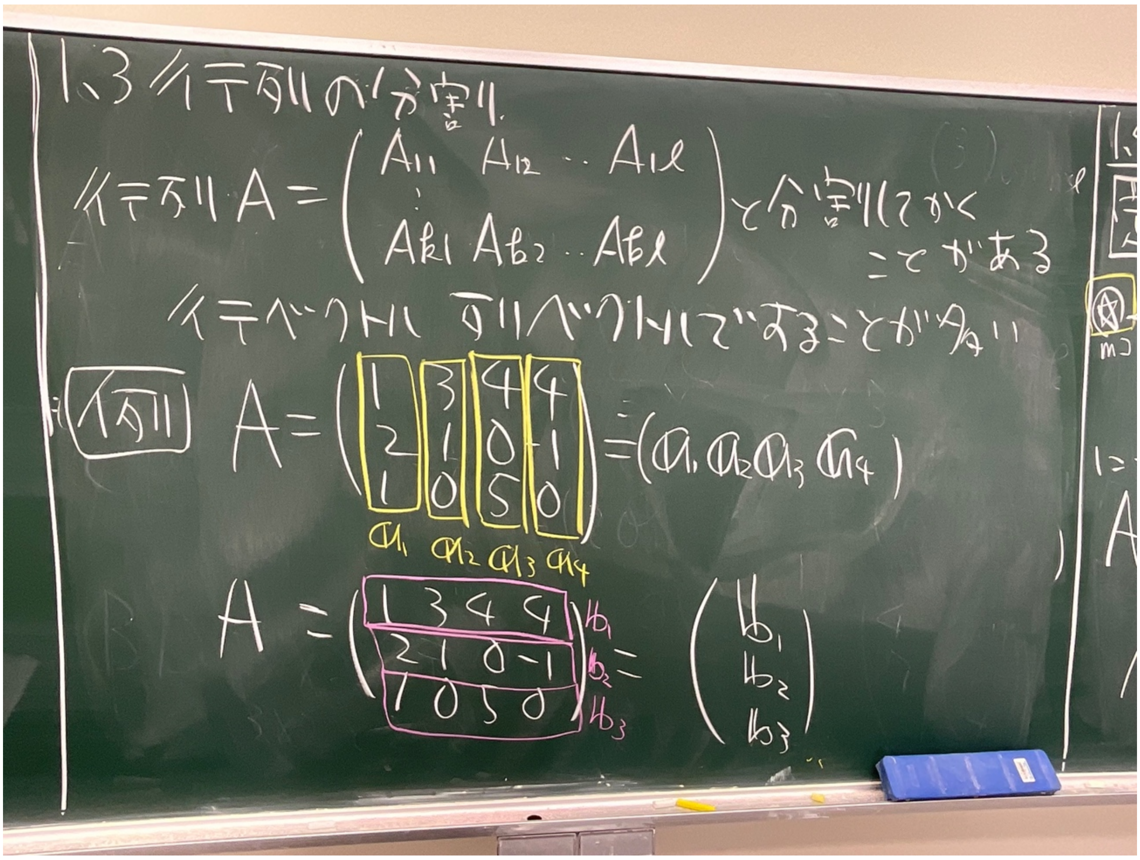
$=\begin{pmatrix}2&3&-1\\0&5&4\\-1&0&-2\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}0&5&9\\3&-2&8\\-1&8&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&-2\\-6&-4&-6\\8&-4&2\end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{array}{c}\boldsymbol{a}_1\\\boldsymbol{a}_2\\\boldsymbol{a}_3\end{array}\begin{pmatrix}2&3&-1\\0&5&4\\-1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5&7\\-3&-6&2\\7&4&3\\\boldsymbol{b}_1&\boldsymbol{b}_2&\boldsymbol{b}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1&\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2&\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_3\\-12&-12&17\\13&-14&22\\-16&-13&-13\\\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_1&\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_2&\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1$ $\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2$ $\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_3$

③×③

3×③



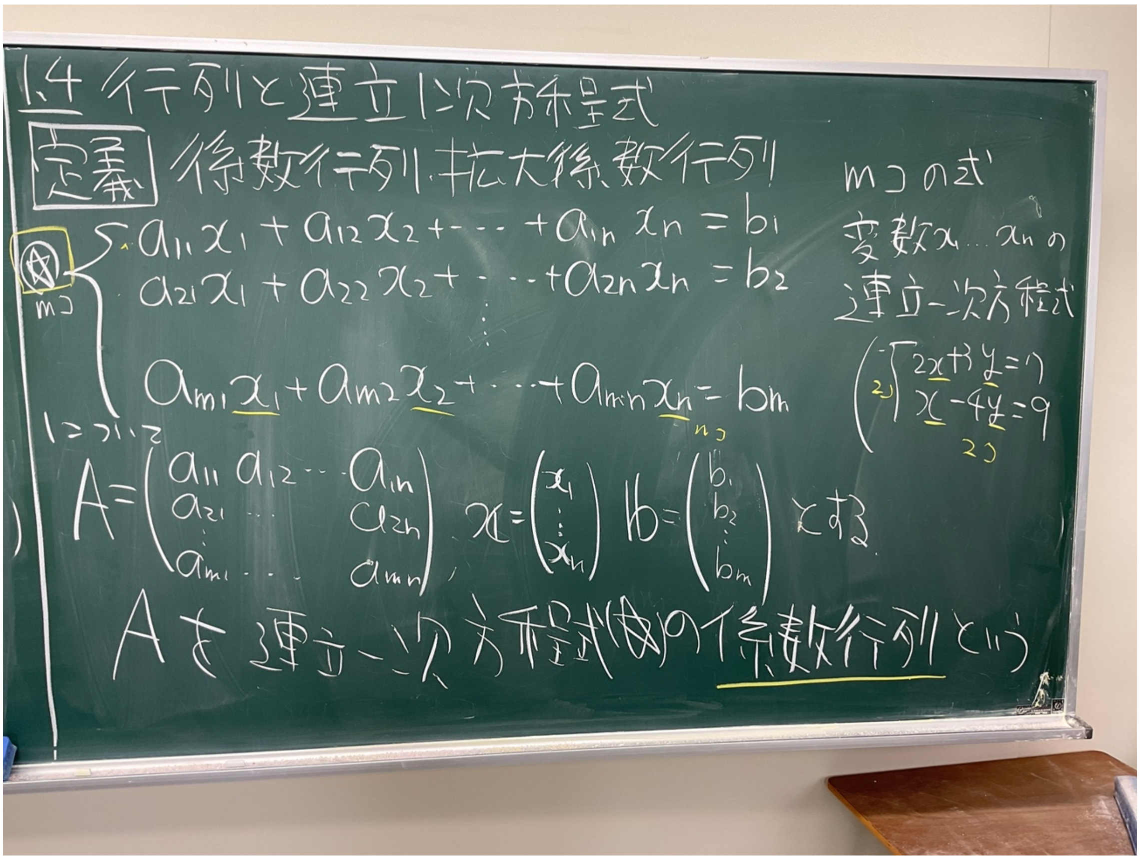
1.3 行列の分割

行列 $A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1l}\\\vdots&&&\\A_{k1}&A_{k2}&\cdots&A_{kl}\end{pmatrix}$ と分割しておくことがある

行ベクトル 列ベクトルですることが多い

例 $A=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}3\\1\\0\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}4\\0\\5\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}4\\-1\\0\end{matrix}}\\\boldsymbol{a}_1&\boldsymbol{a}_2&\boldsymbol{a}_3&\boldsymbol{a}_4\end{pmatrix}=(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4)$

$A=\begin{pmatrix}\boxed{1\ 3\ 4\ 4}&\boldsymbol{b}_1\\\boxed{2\ 1\ 0\ -1}&\boldsymbol{b}_2\\\boxed{1\ 0\ 5\ 0}&\boldsymbol{b}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\\boldsymbol{b}_2\\\boldsymbol{b}_3\end{pmatrix}$



1.4 行列と連立1次方程式

定義 係数行列・拡大係数行列

$$(☆)\ \underset{m個}{}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}\underline{x_1} + a_{m2}\underline{x_2} + \cdots + a_{mn}\underset{n個}{\underline{x_n}} = b_m \end{cases}$$

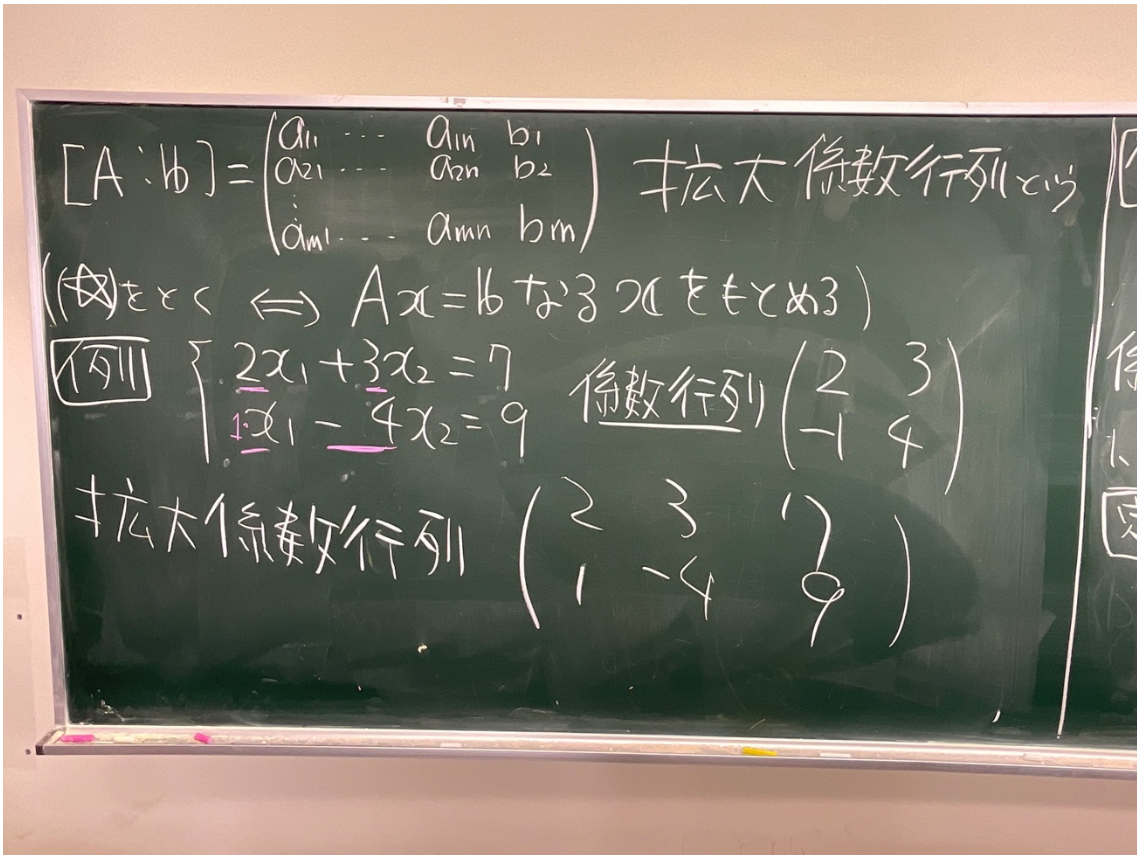
について

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ とする

Aを連立一次方程式(☆)の係数行列という

m個の式
変数 $x_1 \dots x_n$ の
連立一次方程式

$$\text{2)}\begin{cases} 2\underline{x}+3\underline{y}=7 \\ \underline{x}-4\underline{y}=9 \end{cases}$$
2)

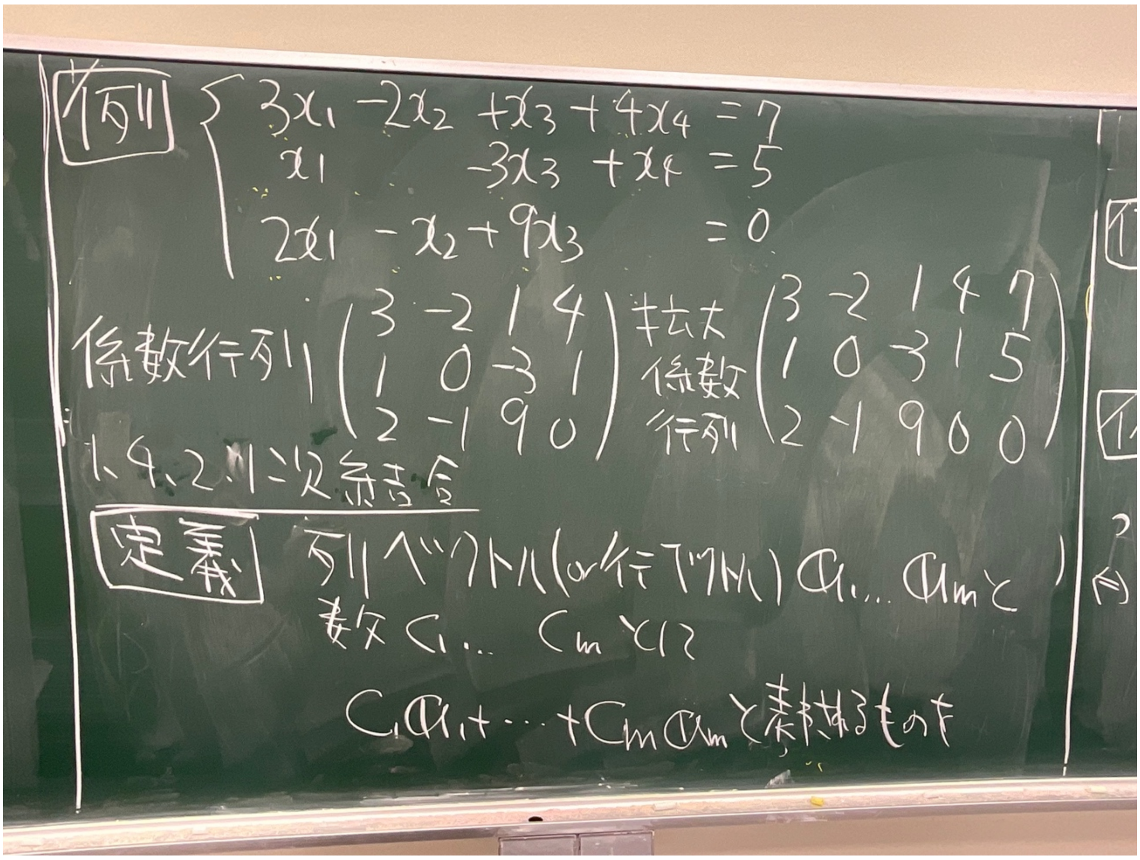


$$[A : b] = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ 拡大係数行列という

(☆)をとく ⟺ $Ax = b$ なる x をもとめる)

例 $\begin{cases} \underline{2}x_1 + \underline{3}x_2 = 7 \\ \underline{1}x_1 - \underline{4}x_2 = 9 \end{cases}$ 係数行列 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$



例

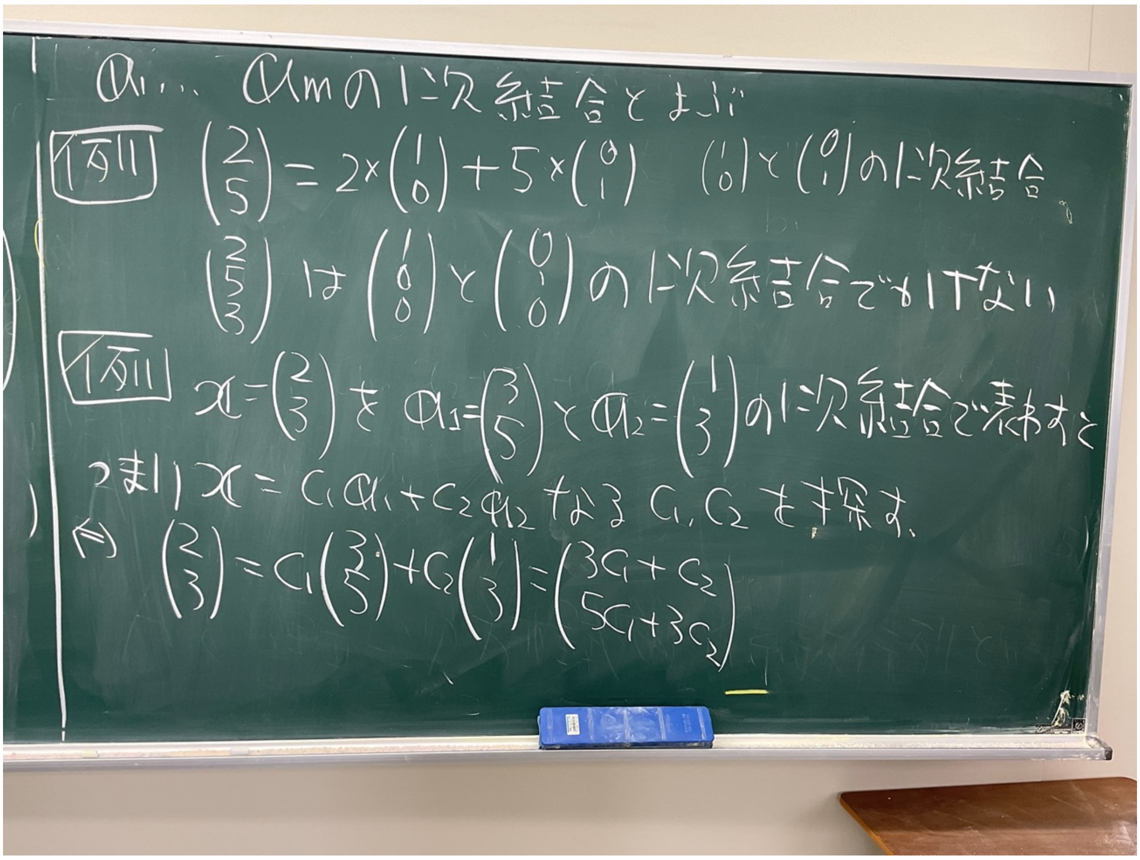
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 7 \\ x_1 - 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

係数行列 $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ 拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.4.2. 1次結合

定義 列ベクトル(or 行ベクトル) $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_m$ と数 $c_1 \dots c_m$ として

$c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m$ と表わされるものを



$\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_m$ の1次結合とよぶ

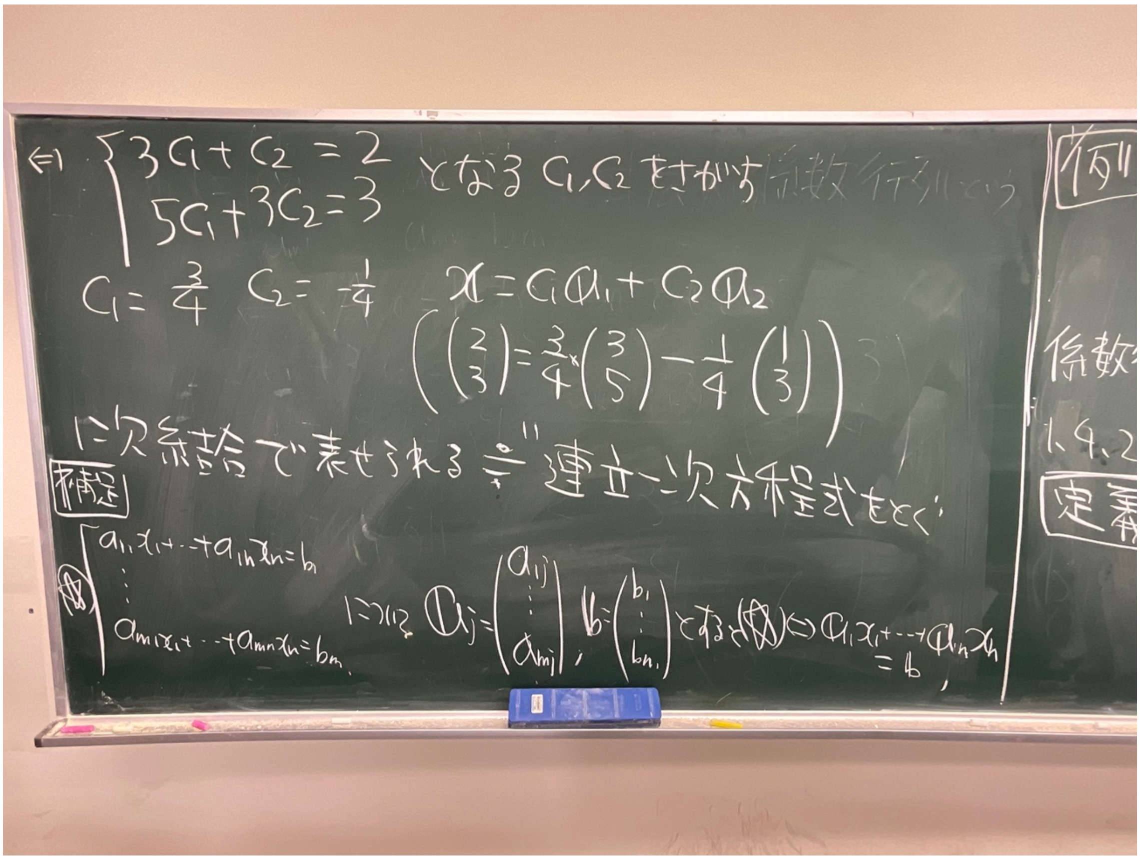
例 $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の1次結合

$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の1次結合ではない

例 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ の1次結合で表わすこと

つまり $\mathbf{x} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2$ なる c_1, c_2 を探す.

$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1 + c_2 \\ 5c_1 + 3c_2 \end{pmatrix}$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3c_1 + c_2 = 2 \\ 5c_1 + 3c_2 = 3 \end{cases}$$ となる c_1, c_2 をさがす 係数行列という

$c_1 = \frac{3}{4}$　$c_2 = -\frac{1}{4}$　$x = c_1 a_1 + c_2 a_2$

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

1次結合で表せられる ≑ 連立一次方程式をとく

補足

$$(\star) \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

について $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{m} \end{pmatrix}$ とすると $(\star) \Leftrightarrow a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$,