1 行列、1.1 行列と数ベクトル

定義 ・m×n個の数（実数または複素数）

a_{ij} $(i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n)$ を長方形に並べたもの

(1,2)成分

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \text{1列} \quad \text{2列} \quad\quad \text{n列}\end{array} \quad \text{or} \quad \begin{array}{cl}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l}\text{第1行} \\ \text{2行} \\ \\ \text{m行}\end{array}\end{array}$$

・m行n列の行列 or m×n行列という

・上の行列Aとかくとき a_{ij} をAの(i,j)成分という

・行列Aを (a_{ij}) ともかく

・$(a_{i1},\dots,a_{in})$ を Aの行といい上から第1行, 2行…m行という

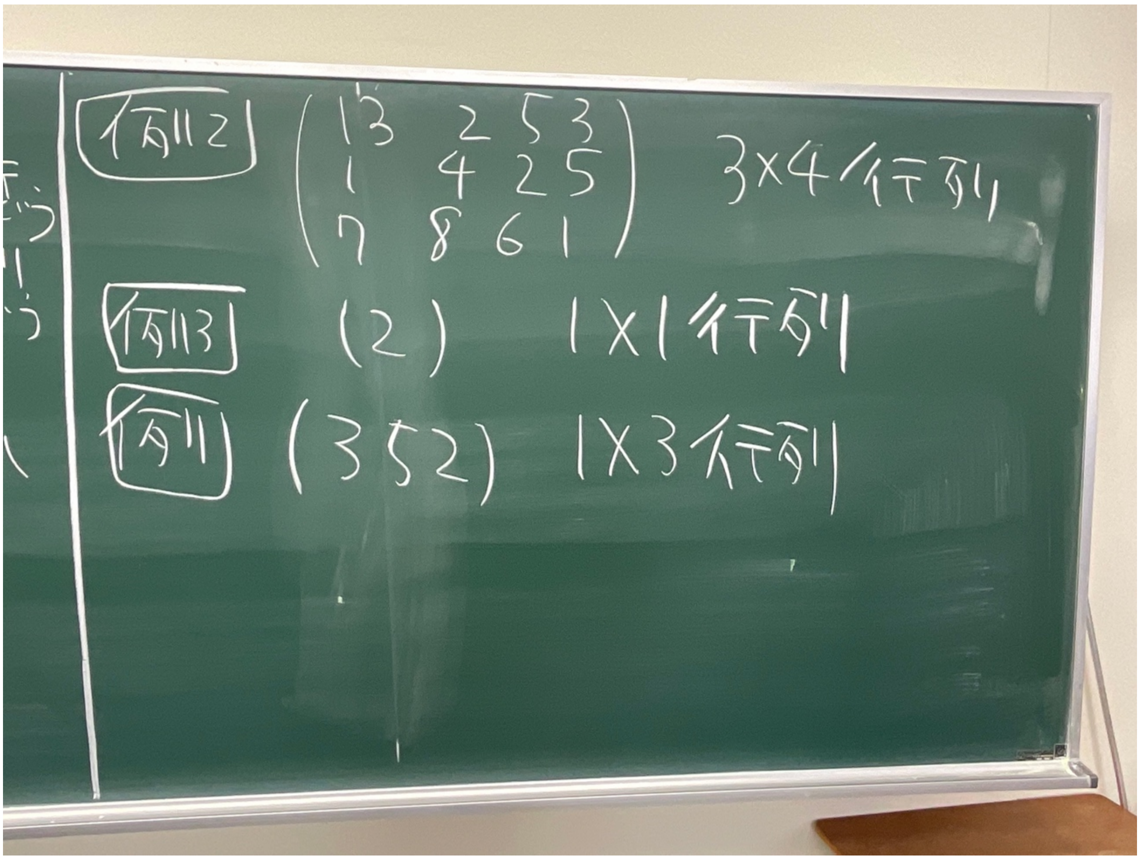
・$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ を Aの列といい、左から第1列, 2列… n列という

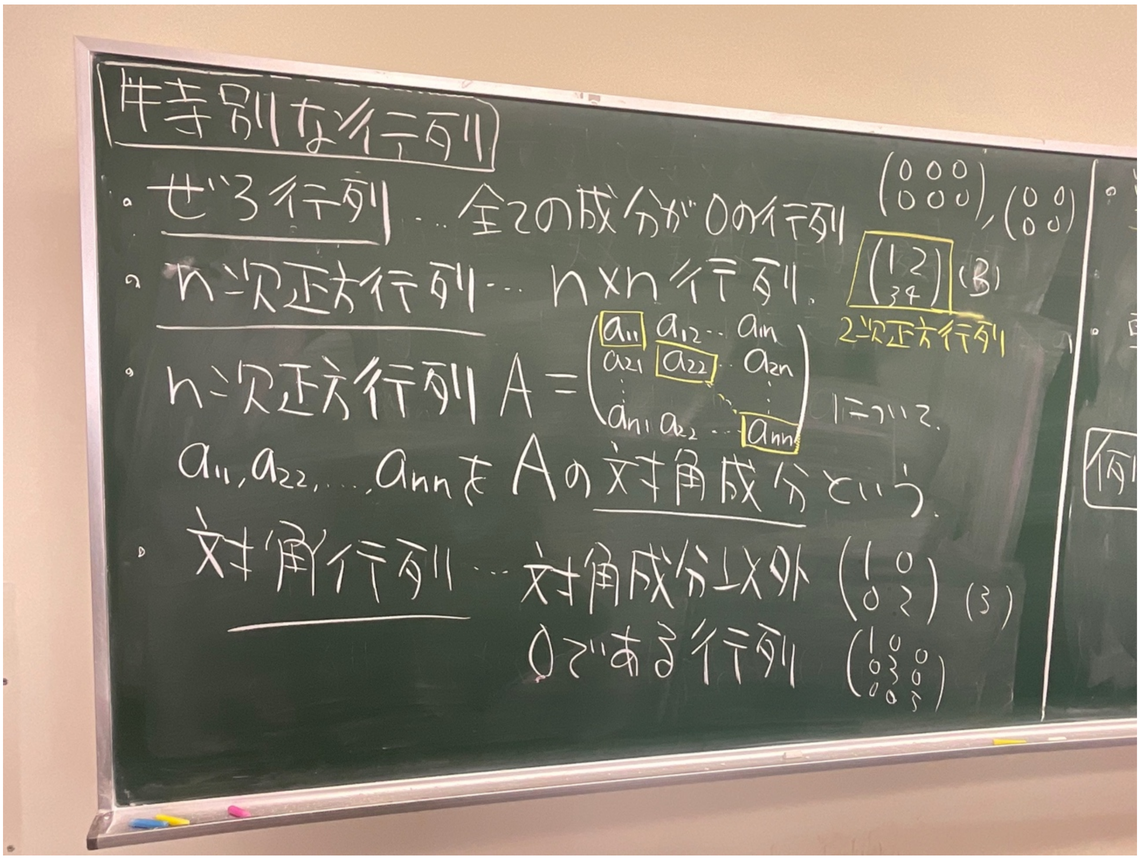
・1×n行列 $(a_1, a_2 \dots a_n)$ 行ベクトル
　n×1行列 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 列ベクトル
　} 2つあわせて数ベクトルという

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$ 2×3行列

(1,2)成分 2　(2,3)成分 4　第2行 $(3, 10\ 4)$

(2,1)成分 3　第3列 $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$


例12
3 2 5 3
1 4 2 5
7 8 6 1
3×4行列
例13
(2)
1×1行列
例
(3 5 2)
1×3行列


特別な行列
・ゼロ行列…全ての成分が0の行列
・n次正方行列…n×n行列
2次正方行列
・n次正方行列 A = について、
a11, a22, …, ann をAの対角成分という。
・対角行列…対角成分以外0である行列

・単位行列…対角成分が1な対角行列 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ (1) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\boxed{E_n とかく}$ n次単位行列

（かけざんの"1"みたいな役割をする）

・転置行列…Aの行と列をいれかえた行列。${}^tA$とかく

$$A=(a_{ij})_{m\times n} \Rightarrow {}^tA=(a_{ji})_{n\times m}$$

（1行目が1列目にいく）

例 $A=\begin{pmatrix}2&5&8\\3&2&1\end{pmatrix}$ のとき ${}^tA=\begin{pmatrix}2&3\\5&2\\8&1\end{pmatrix}$

$${}^t({}^tA)=\begin{pmatrix}2&5&8\\3&2&1\end{pmatrix}=A$$

命題 ・A: m×n行列なら ${}^tA$ n×m行列

${}^t({}^tA)=A$

定義 クロネッカーのデルタ

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\text{のとき}\\0 & i\neq j\text{のとき}\end{cases}$$

例 $\delta_{11}=\delta_{22}=1$ $\delta_{12}=\delta_{21}=0$

$$E_n=(\delta_{ij})_{n\times n}$$

1.2 行列の演算

定義 m×n行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$

和 $A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$

差も同様に定める（和は各成分の足し算 差は引き算する）

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A+B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $A-B=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 7 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ $A+B=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$ $A-B=\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ $A+B$ できない!!

2×2行列 2×3行列 $A-B$

和と差の性質

- $A \pm B = B \pm A$
- $A \pm O = A$ (Oはぜろ行列)
- $(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$
- ${}^tA + {}^tB = {}^t(A+B)$

定義 (行列のスカラー倍)

$m \times n$行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ と数cについて

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ ca_{m1} & \cdots & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$ とする

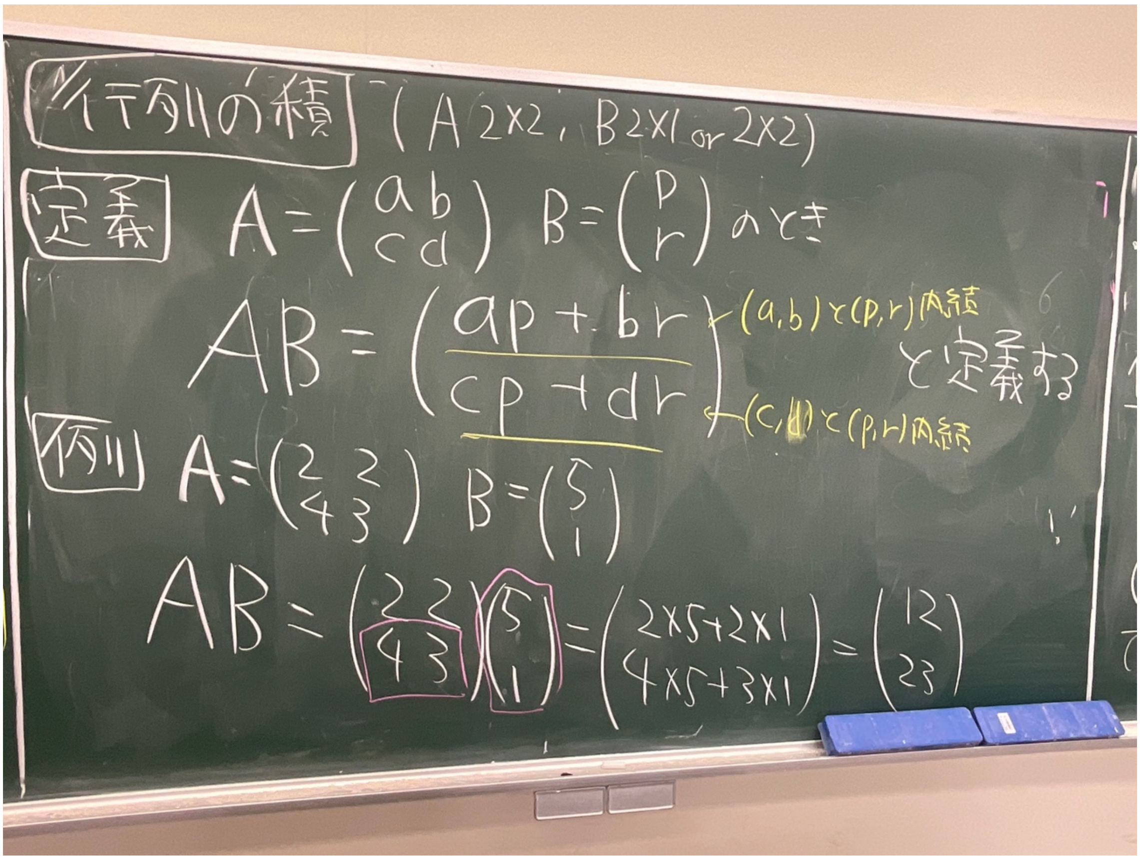
(Aのc倍)

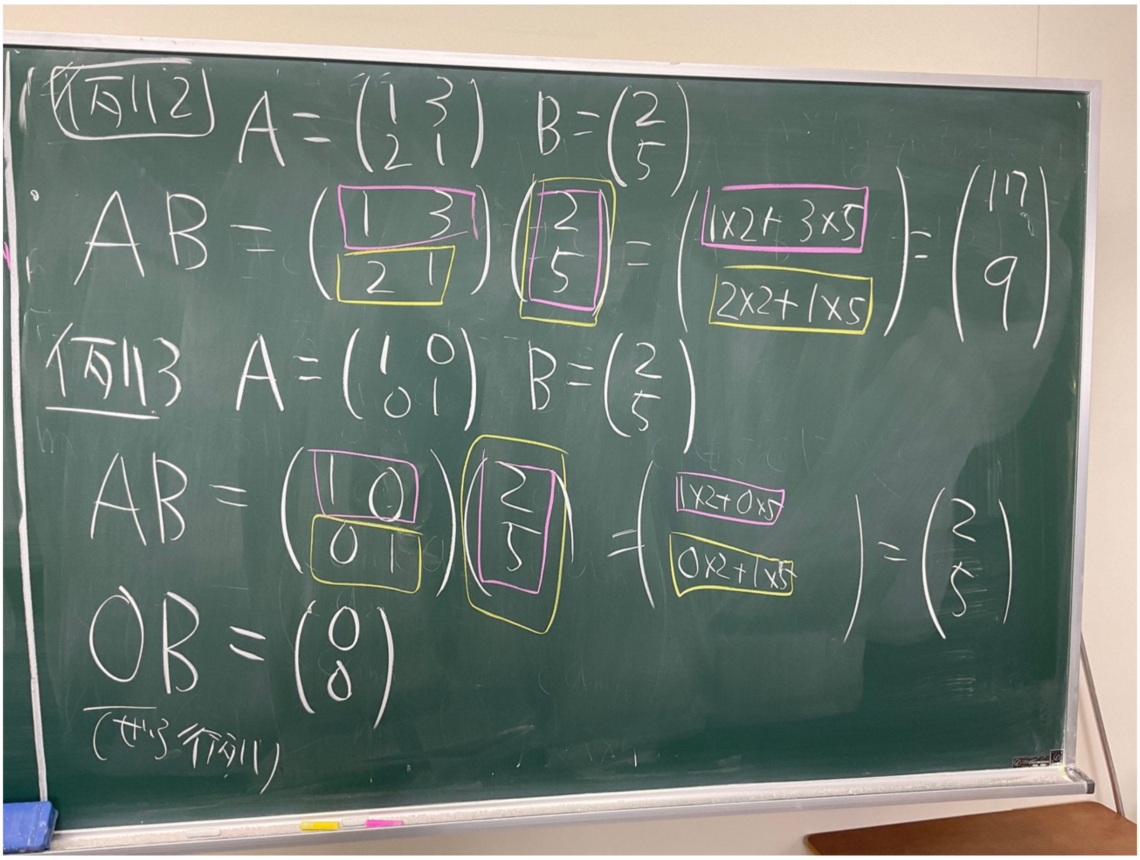
例

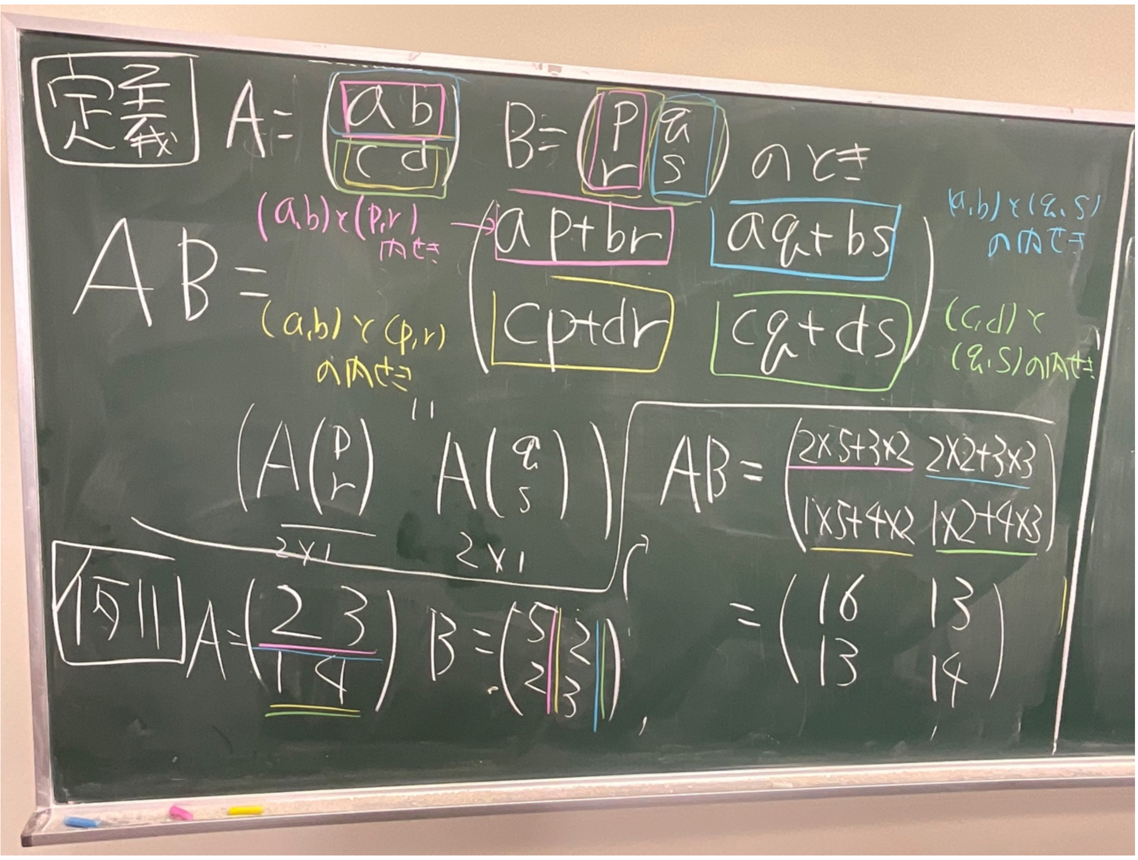
- $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ $c=3$ $cA = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 24 \\ 6 & 15 & -3 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $c=-1$ $cA = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \underbrace{-A}_{\text{とかく}}$

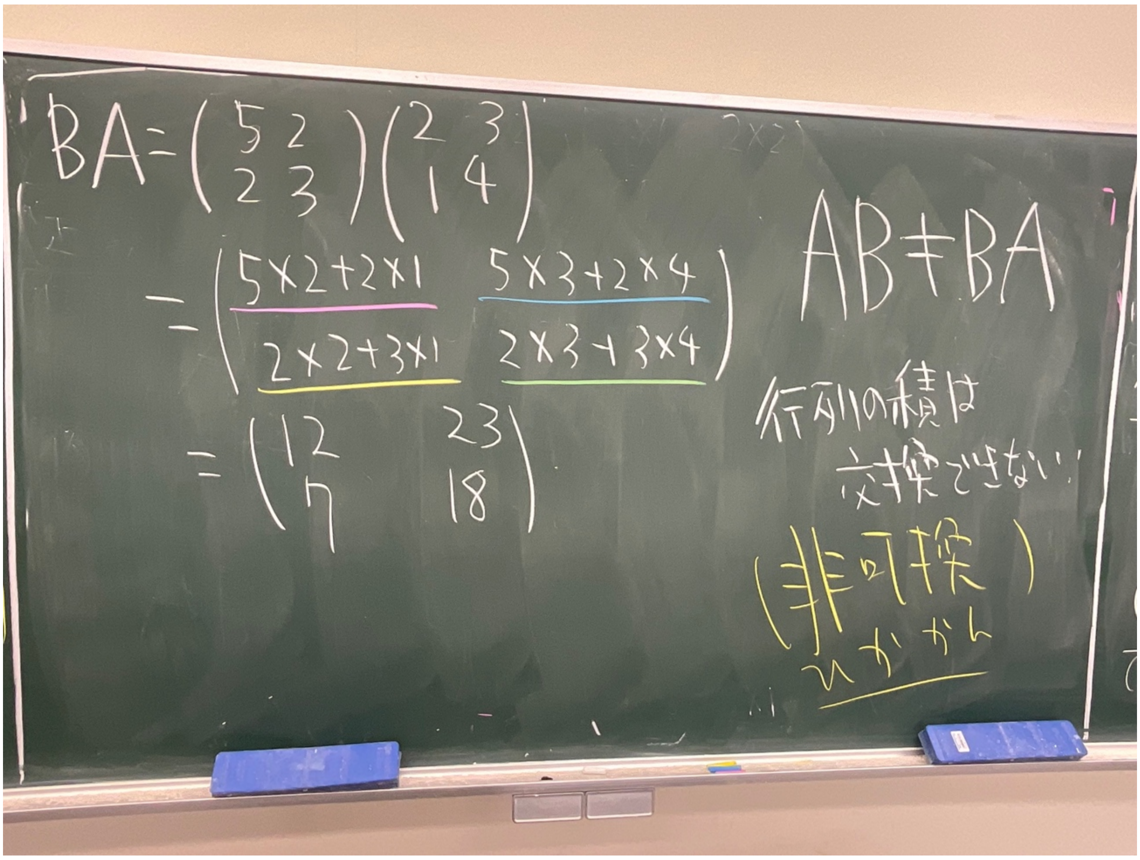
命題

- $0A = O$ (Oは零行列)
- $1A = A$
- $A + (-A) = O$
- $(ab)A = a(bA)$


行列の積 (A 2×2, B 2×1 or 2×2)
定義 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ のとき
$AB=\begin{pmatrix} ap+br \\ cp+dr \end{pmatrix}$
(a,b)と(p,r)内積
と定義する
(c,d)と(p,r)内積
例1 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$
$AB=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times5+2\times1 \\ 4\times5+3\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}$


例2 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
$AB=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times2+3\times5 \\ 2\times2+1\times5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 \\ 9 \end{pmatrix}$
例3 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times2+0\times5 \\ 0\times2+1\times5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
$OB=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
(ゼロ行列)


定義 A=(a b / c d) B=(p q / r s) のとき
AB=(ap+br aq+bs / cp+dr cq+ds)
(a,b)と(p,r) 内せき
(a,b)と(q,s) の内せき
(a,b)と(p,r) の内せき
(c,d)と(q,s)の内せき
(A(p / r) A(q / s))
2×1 2×1
例1 A=(2 3 / 1 4) B=(5 2 / 2 3)
AB=(2×5+3×2 2×2+3×3 / 1×5+4×2 1×2+4×3)
=(16 13 / 13 14)


BA=(5 2 / 2 3)(2 3 / 1 4)
=(5×2+2×1 5×3+2×4 / 2×2+3×1 2×3+3×4)
=(12 23 / 7 18)
AB≠BA
行列の積は交換できない!!
(非可換)
ひかかん