前回 余因子行列・余因子展開

$A=(a_{ij}) \rightsquigarrow \widetilde{A}_{ij} = $ (Aのi行j列をくりぬいたもの)

$(\widetilde{A})$ … (i,j)成分を $(-1)^{i+j}\det(\widetilde{A}_{ji})$ とする

定理 $\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\widetilde{A}_{1j}) + (-1)^{2+j} a_{2j} \det(\widetilde{A}_{2j}) + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(\widetilde{A}_{nj})$

$$A \cdot \widetilde{A} = \widetilde{A} \cdot A = (\det A) E_n$$

(とくに $\det A \neq 0$ $\Rightarrow$ $\widetilde{A} = \dfrac{A^{-1}}{\det A}$)

定理の証明 簡単のため $j=1$ とする.

示すことは $\det A = +a_{11}\det(\widetilde{A}_{11}) - a_{21}\det(\widetilde{A}_{21}) + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det(\widetilde{A}_{n1})$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \\ a_{21} & & & \\ a_{31} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \boxed{0} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boxed{0} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ \boxed{0} & & \vdots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

よって各部分が

$(-1)^{i+1} a_{i1} \det(\widetilde{A}_{i1})$ になることを示せばよい。

$$-)+\cdots+\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \\ a_{n-1\,1} & & & \\ 0 & & & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & a_{2n} & & a_{1n}\\ \vdots & & & \\ 0 & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

ここで

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \\ a_{i1} & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n}\\ & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n}\\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = (-1)^{i+1}a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \\ a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n}\\ a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n}\\ \vdots & & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

行の入れかえを $i-1$ 回する

$$\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \\ a_{i-1\,2} & & a_{i-1\,n}\\ a_{i+1\,2} & & a_{i+1\,n}\\ \vdots & & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = \det \hat{A}_{i1}$$ よりいえた

② $\tilde{A}$ の ij 成分を $\tilde{a}_{ij}=(-1)^{i+j}\det(\hat{A}_{ji})$ とすると

$A\tilde{A}$ の ik 成分は

$$(A\tilde{A})_{ik} \underset{\text{定義}}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\times\tilde{a}_{jk}$$

=

$\tilde{A}$の

=

よって

$k \neq$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{j+k} \det(\hat{A}_{kj})$$

$\hat{A}$のていぎ

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{ij} \det(\hat{A}_{kj})$$

よって $k=i$ なら この値は $\det A$ になる
（1番目に示した式から）

$k \neq i$ なら この値が 0 となることをいえばよい。

$$0 = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ k \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ij} \det(\hat{A}_{kj})$$

k行目で余因子展開

より いえる

（k行目のみ $(a_{i1} \cdots a_{in})$ となる行列）

3.4.2 クラメルの公式

定理 A n次正則行列

$A=(a_1 \dots a_n)$　a_i 列ベクトルとする

このとき $Ax=b$ の解は

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{として}\quad x_i=\frac{\det(a_1 \dots \overset{i}{b} \dots a_n)}{\det A}$$

となる

例 $A=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}5\\3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}} \end{pmatrix} \\ \quad a_1 \quad a_2 \end{array}$　$b=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ のとき $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=b$ の解は

$$x_1=\frac{\det(b, a_2)}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix}3&1\\2&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5&1\\3&2\end{vmatrix}}=\frac{4}{7}$$

$$x_2=\frac{\det(a_1, b)}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix}5&3\\3&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5&1\\3&2\end{vmatrix}}=\frac{1}{7}$$

証 x_i を $Ax=b$ の解とすると

$$b=Ax=\underbrace{x_1}_{\text{スカラー}}\underbrace{a_1}_{\text{列ベクトル}}+\dots x_n a_n$$ となる

よって $\det(\mathbf{b}\ a_2 \cdots a_n)$

$$= x_1 \det(a_1\ a_2 \cdots a_n) + x_2 \underbrace{\det(a_2\ a_2 \cdots a_n)}_{=0} + \cdots + x_n \underbrace{\det(a_n\ a_2 \cdots a_n)}_{=0}$$

$$= x_1 \det A \quad //$$

3.5 特殊な形の行列式

定理（ヴァンデルモンドの行列式）

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{aligned} &(x_2-x_1)\times(x_3-x_1)\cdots\times(x_{n-1}-x_1)(x_n-x_1) \\ &\times(x_3-x_2)\times\cdots\times(x_{n-1}-x_2)(x_n-x_2) \\ &\qquad\ddots \qquad\qquad \vdots \\ &\qquad\qquad (x_n-x_{n-1}) \end{aligned}$$

$$= \prod_{1\leqq i<j\leqq n} (x_j - x_i)$$

積記号
$1 \leqq i < j \leqq n$
なる i, j について
$(x_j - x_i)$ をすべてかける

$\boxed{\text{証}}$ nに関する帰納法

$n=2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)$ ok.

$n-1$で成立するとして

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \\ x_1^{n-2} & & \cdots & x_1^{n-2} \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_2-x_1) \end{vmatrix}$$

x_1倍ひく

(上の行のx_1倍を下からひくことを$n-1$回する)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & (x_2-x_1) & (x_3-x_1) & \cdots & (x_n-x_1) \\ \vdots & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)\times\cdots(x_n-x_1)\times \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)\times\cdots\times(x_n-x_1)\times \prod_{2\le i<j\le n}(x_i - x_j)$$

帰納法の仮定

$$= \prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)$$

//

$\boxed{\text{定理}}$ $b_1 \dots b_n, c_1 \dots c_n$ 実数, $b_1 \dots b_n$ 相異なるとする

このとき $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ で

a_i 実数かつ $f(b_i) = c_i$ となるものがある.

$\boxed{\text{証}}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & \cdots & b_1^{n-1} \\ 1 & b_2 & \cdots & b_2^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & b_n & \cdots & b_n^{n-1} \end{pmatrix}$ とおくと.

$f(b_i) = c_i$ なる

$a_1 \dots a_n$ の存在 $\Longleftrightarrow B\begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - b_1^n \\ c_2 - b_2^n \\ \vdots \\ c_n - b_n^n \end{pmatrix}$

なる実数解 $a_1 \dots a_n$ の存在

今 $\det B \underbrace{=}_{\text{ヴァンデルモンド}} \prod_{1 \le i < j \le n} (b_j - b_i) \neq 0$ より B は正則のため

このような実数解 $a_1 \dots a_n$ は存在する.

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} c_1 - b_1^n \\ \vdots \\ c_n - b_n^n \end{pmatrix}$

定理

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & & & O \\ a_1 & x & -1 & & \\ a_2 & 0 & x & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ a_n & O & & & x \end{vmatrix} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

証明 帰納法

$n=1$ $\begin{vmatrix} a_0 & -1 \\ a_1 & x \end{vmatrix} = a_0x + a_1$ ok

7/3, 7/10 休講

7/17 演習

$n-1$で成立として

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & & \\ a_1 & x & -1 & \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ a_n & & & x \end{vmatrix} \underset{\text{1行目で余因子展開}}{=} a_0 \begin{vmatrix} x & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & -1 \\ & & & x \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} a_1 & -1 & & \\ \vdots & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ a_n & & & x \end{vmatrix}$$

$$= a_0 x^n + \boxed{a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n} \quad //$$

帰納法のかてい