1-1

A 1×3 B 2×2 ×

B 2×2 A 1×3 ×

A 1×3 C 3×2 $AC = 1\times2$

$$AC = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (4+1+15,\ -10-3)$$

$$= (20,\ -13)$$

C 3×2 A 1×3 ×

$B = 2\times2$ $C = 3\times2$ ×

C 3×2 B 2×2 $CB = 3\times2$

$$CB = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 18 & 11 \\ -11 & -7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$AC = (20\ -13)$

CB

$$= \begin{pmatrix} 18 & 11 \\ -11 & -7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$

手順1 拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{である}$$

手順2 上を簡約化すると

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 2 & 4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$-2\ 2\ 0\ -4$
$1\ -1\ 0\ 2$
$-1\ 1\ 0\ -2$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

判別

元にもどすと

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad + 2x_4 &= -1 \\
x_2 \qquad - x_4 &= 1 \\
x_3 - x_4 &= -1
\end{aligned}
$$

よって $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2s \\ 1+s \\ -1+s \\ s \end{pmatrix}$ $\underline{s\text{ 実数}}$

となる

③ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を簡約化せよ

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} -2 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & -3 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 & -1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & -1 & 0 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 0 & -4 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 3 \end{matrix}$$

$\boxed{答}$ $\begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -5 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{4-1}$

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & & n-1 & n \end{bmatrix} \text{とおく。}$$

$\det A_5$ を求めればよい。

<u>以下</u> $\det A_n = 1$ を示す

$|A_1| = |1| = 1$ でok

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & 2 & & & n \end{vmatrix} \quad ②-①する$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 1 & & & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{n-1} & \\ 0 & & & \end{vmatrix} = |A_{n-1}|$$

よって $|A_n| = |A_{n-1}| = \cdots = |A_2| = 1$ となる

よって答えは 1

$\boxed{4-2}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -8 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -8 \left(18 + 5 - 60 - 18 \right)$$

$$= -8 \times -55 = 440 \,/\!/$$

⑤ $A = \begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda-3 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$ とおく。

$Ax = 0$ が $x = 0$ 以外の解をもつ

$\iff$ A は正則でない

$\iff$ $\det A = 0$ より

$\det A = 0$ なる λ を求めればよい

$$|A| = (\lambda-3)^2\lambda + 4 + 4 - 4(\lambda-3) - \lambda - 4(\lambda-3)$$

$$= (\lambda^2 - 6\lambda + 9)\lambda + 8 - 8(\lambda-3) - \lambda$$

$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda + 8 - 8\lambda + 24 - \lambda$$

$= x^3 - 6x^2 + 32$ $\quad -8-24+32$

$= (x+2)(x^2-8x+16)$

$= (x+2)(x-4)^2$

$\therefore \quad x = -2, \ 4$ //

$\boxed{6}$

(1) $\det {}^tA = \det A$

$\det AB = (\det A)(\det B)$ より

$$\det({}^tAA) = (\det A)^2$$

$$\det(E_2) = 1.$$

$\therefore$ $\det A = \pm 1$ ($\det A$ は実数より)

(2) $\tilde{A} \cdot A = (\det A) E_n$ より

$$(\det \tilde{A})(\det A) = \det((\det A)E_n) = (\det A)^n$$

$\left(\det \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix} = a^n \text{ より} \right)$

$\det A \neq 0$ より $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$

(3) $\det A = 1$ から A が正則より

$A^{-1} = \tilde{A}$ となる.

ここで $\tilde{A}$ の(i,j)成分

$= (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ji}$

($\tilde{A}_{ji}$ は A から第j行と第i行をくりぬいた行列)

より $\tilde{A}_{ji}$ が整数の行列より

$(-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ji}$ も整数である

よって $\tilde{A}$ の(i,j)成分も整数である。

(4) 問題4-1より

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & n-1 & n \end{bmatrix}$$ とおくと

$\det A_n = 1$ である。

よって、A_{100} の第1行と第2行をいれかえた行列 B の $\det$ は -1 である。

B の第1行を2024倍したものを C とすると $\det C = -2024$ となる

構成から C のすべての成分は正の整数である //

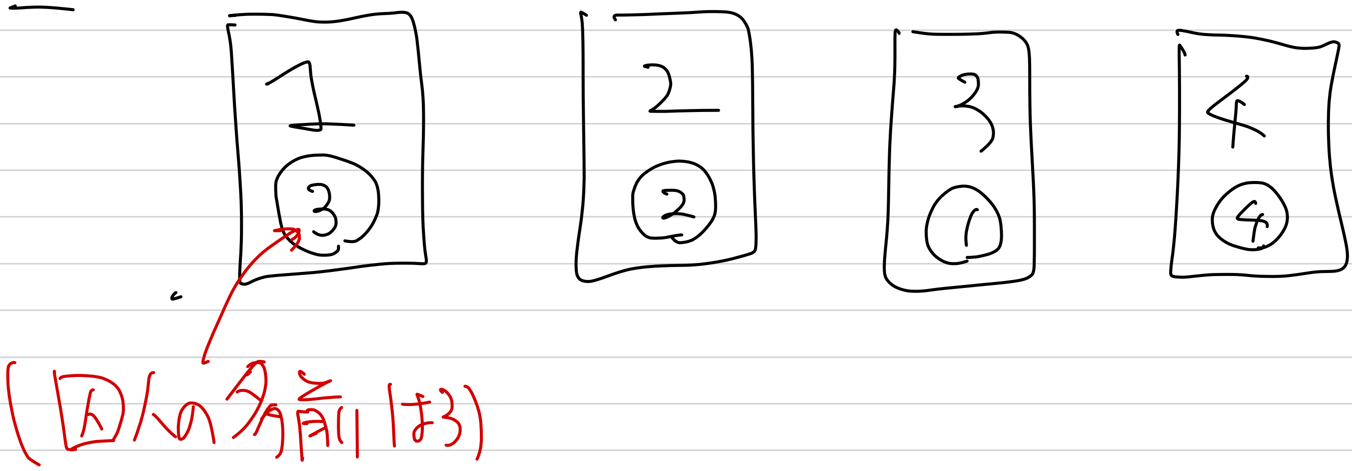
おまけ問題のこたえ

囚人に番号 1,2,・・・ 100 とふり
ロッカーに 1,2,・・・ 100 とふる。

i番目の囚人は i番目のロッカーをまず
あけ、次にその中に入ってる番号のロッカー
をあけ、その次に・・・ を50回くりかえす。

これを 1,2,・・・,100番目の囚人もおこなう

図



囚人1は 1→3 とロッカーをあける。