期末試験

2024 年度春夏学期 大阪大学 全学共通教育科目 線形代数学 I 工（理 63〜123）

岩井雅崇 (いわいまさたか) 2024/07/24

下の問題を解け. ただし解答に関しては答えのみならず, 答えを導出する過程をきちんと記すこと.

第 1 問. 次の行列 A, B, C のうち, 積が定義される全ての組み合わせを求め, その積を計算せよ.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

第 2 問. 行基本変形と行列の簡約化を用いて, 次の連立 1 次方程式の解を求めよ.

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \end{cases}$$

第 3 問. 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

第 4 問. 次の行列の行列式をそれぞれ求めよ.

(1). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (2). $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

第 5 問. 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} (\lambda-3)x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & (\lambda-3)x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & \lambda x_3 & = & 0 \end{cases}$$

が $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 以外の解を持つような λ の値を全て求めよ.

第 6 問に続く

第 6 問

次の問題に答えよ．ただし解答に際し授業・教科書で証明を与えた定理に関しては自由に用いて良い．

(1). 実数からなる n 次正方行列 A について, ${}^t\!AA = E_n$ ならば, $\det(A) = \pm 1$ であることを示せ．ここで E_n を n 次の単位行列とし, ${}^t\!AA$ は ${}^t\!A$ と A の積のことである．

(2). 実数からなる n 次正則行列 A について, A の余因子行列 $\tilde{A}$ の行列式 $\det\left(\tilde{A}\right)$ は $\det(A)^{n-1}$ であることを示せ．

(3). 整数からなる n 次正方行列 A について, $\det A = 1$ ならば, 逆行列 A^{-1} のどの成分も整数であることを示せ．

(4). 1 以上の整数からなる 100 次正方行列 C で $\det C = -2024$ となるものを一つ構成せよ．ただし答えだけでなくその理由も書くこと．

おまけ問題

ある部屋に 100 人集められている．別の部屋に 100 個のロッカーがあり, それぞれのロッカーには 100 人のうち 1 人の名前が書かれた紙が入れてある．違うロッカーには違う名前の紙が入っている．

順番を決め, 1 人がロッカーの部屋に入り, 50 個のロッカーを開ける．その中に自分の名前があれば、ロッカーを元の状態に戻し, 次の人がロッカー部屋に入り, 50 個のロッカーを開ける．これを繰り返し, 100 人が皆自分の名前を見つけられたらゲームは成功．1 人でも名前が見つけられなければゲームは失敗である．

100 人はゲームを始める前に議論し戦略を決めることができる．ただしゲームが始まったらお互いに話すこと・情報を伝えることはできない．このゲームにおいて, 30%以上の確率で成功する戦略を考えよ．

[補足] 普通にランダムにロッカーを開ける戦略では成功する確率は $(\frac{1}{2})^{100}$ となってしまう．なおこの問題は 100 人の囚人問題と呼ばれている．試験後解答が気になる方は調べてみると良い．

問題は以上である．