前回(連鎖律)

$x(t), y(t)$、tの関数

$f(x,y)$　x,yの関数

$g(t)=f(x(t), y(t))$としたとき

$$\frac{dg}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

5.3 2階偏導関数

$\boxed{\text{定義}}$ $f(x,y)$　xとyの(C^∞級)関数

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ 1階偏導関数
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ (fをxで2回偏微分する)
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ (xで偏微分してyで偏微分する)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

(yで2回偏微分)　(yで偏微分して xで偏微分する)

これら4つを2階偏導関数という

例　$f(x,y)=x^2y^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(2xy^3)=2y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3x^2y^2 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=6xy^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2)=6x^2y$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2)=6xy^2}\ /\!/$$

定理　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ が成り立つ

C^∞級関数 $f(x,y)$について

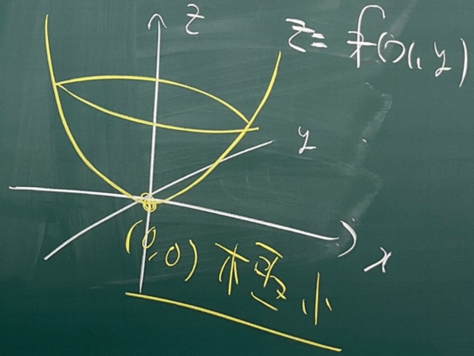
2階偏導関数の応用

・極値問題

・与えられた関数がどの点で極大値・極小値をもつか?

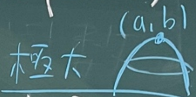
$f(x,y)=x^2+y^2=z$

例



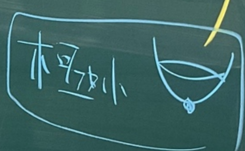
定義 (極大・極小・鞍点(あんてん) (saddle point))

・$f(x,y)$が(a,b)で極大とは
(a,b)のまわりで$f(a,b)$が最大となること.



(ある(a,b)中心の円板Uがあって, $f(a,b)>f(a',b')$が任意の$(a',b')\in U$について成りたつ)

・$f(x,y)$が(a,b)で極小とは
(a,b)のまわりで$f(a,b)$が最小となること

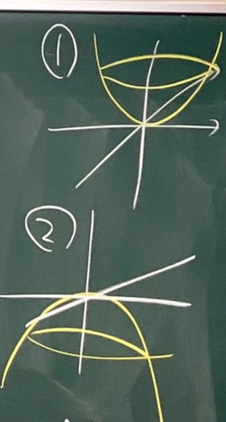


・極大値と極小値 まとめて極値という
・極値をとる点 (a,b) を極値点という
・$f(x,y)$ が点 (a,b) で鞍点(あんてん)(saddle point)とは
ある方向で極大となり
ある方向で極小となる点のこと
(馬の鞍(くら)みたいな形, ポテトチップスの形)

例

① $f(x,y)=x^2+y^2$ $(0,0)$ で極小

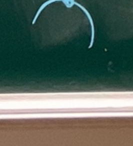
② $f(x,y)=-(x^2+y^2)$ $(0,0)$ で極大



③ $f(x,y)=x^2-y^2$ $(0,0)$ で鞍点

理由) $f(x,0)=x^2$ より x 軸でみると極小

$f(0,y)=-y^2$ より y 軸でみると極大



定理 $f(x,y)$が(a,b)で極大・極小をとるならば

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0.$$

補足 逆は成りたたない

$\left(f(x,y)=x^2-y^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0\right.$

しかし$(0,0)$は鞍点

(この方法では極値の候補しかわからない

証 (a,b)で$f(x,y)$が極大とする

$f(x,b)$は(a,b)で極大より一変数の定理より

(資料定理49)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\left.\frac{d}{dx}f(x,b)\right|_{x=a}=0$$ よりわかる

定義 (ヘッシャン Hessian)

$f(x,y)$について $D_f=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2$ を

ヘッシャンという。

定理（ヘッシャンによる極値判定法）

$f(x,y)$ が点 (a,b) で $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ とする.

① $Df(a,b)>0$ かつ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)>0$ のとき
$f(x,y)$ は (a,b) で極小.

② $Df(a,b)>0$ かつ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)<0$ のとき
$f(x,y)$ は (a,b) で極大.

③ $Df(a,b)<0$ のとき (a,b) は鞍点.

$\boxed{例}$ ① $f(x,y)=x^2+y^2$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

$$Df(\cancel{x,y})\,(0,0)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2 = 2\times 2-0^2=4>0$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2>0$

$\Rightarrow (0,0)$ で極小

② $f(x,y)=-(x^2+y^2)$

$Df(0,0)=4>0$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=-2<0$

$\Rightarrow (0,0)$ で極大.

③ $f(x,y)=x^2-y^2$

$Df(0,0)=-4<0 \Rightarrow (0,0)$ で鞍点.

この定理を使った極値の求め方.

手順1 $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ なる点(a,b)を求める

手順2 $Df(a,b)$ と $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ を求める

上の点(a,b)について

手順3 この定理の①〜③にあてはめる

例1 $f(x,y)=x^3-y^3-3x+12y$ の極値をもとめる.

手順1 $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-3y^2+12$ より $\begin{cases}3a^2-3=0\\-3b^2+12=0\end{cases}$ なる(a,b)を求める

$(a,b)=(1,2)(1,-2),(-1,2)(-1,-2)$

手順2 $Df(x,y)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\times\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2$

$=6x\times(-6y)-0^2=-36xy$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$

手順3

・$Df(1,2) = -36 \cdot 1 \cdot 2 = -72 < 0$　鞍点

・$Df(1,-2) = 72 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = 6 > 0$

極小, 極小値 $f(1,-2) = -18$.

・$Df(-1,2) = 72 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,2) = -6 < 0$

極大　極大値 $f(-1,2) = 18$

・$Df(-1,-2) = -72 < 0$　鞍点

よって $f(x,y)$ は $(1,-2)$ で極小値 -18 をとり

$(-1,2)$ で極大値 18 をとる.