前回 2変数の微分

$f(x,y)$ について （偏微分）

$\frac{\partial f}{\partial x}$ = (yを定数とみなしてxで微分)

$\frac{\partial f}{\partial y}$ = (xを定数とみなしてyで微分)

例1 $f(x,y)=x^2y^3$

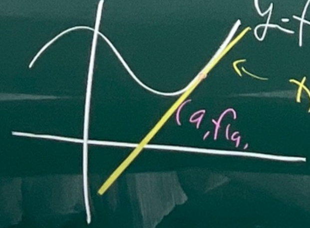
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2$

例2 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\right\} = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{-2y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{-2y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$y=f(x)$ について $f'(a)$=(点$(a,f(a))$の接線のかたむき)



かたむき$=f'(a)$

(微分=接線のかたむき)

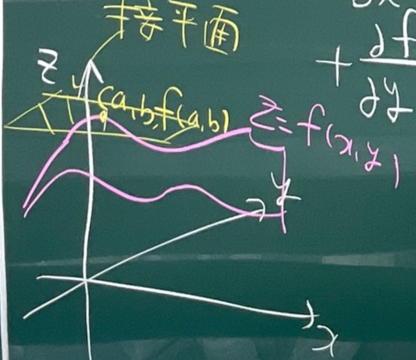
定理 $f(x,y)$: C^∞ 級関数

$z=f(x,y)$ の点 ~~(a,b)~~ $(a,b,f(a,b))$ での接平面は

(a,b)で接する平面

$$z-f(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

で与えられる



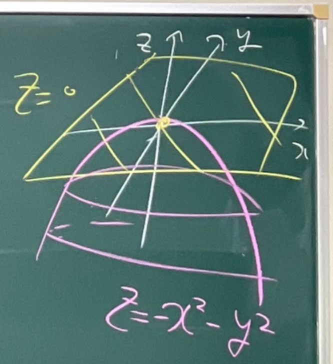
$\boxed{例1}$ $f(x,y)=-(x^2+y^2)$

点 $(0,0,0)$ での接平面の式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=-2x\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-2y\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0$$

よって接平面は $z=0$ で表わされる



5.2 連鎖律(チェインルール)

定理 $f(x,y)$ 2変数関数.
$x(t), y(t)$ を t に関する関数とする

$z(t) = f(x(t), y(t))$ (tの関数) について

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

例1 $f(x,y) = 2x^3y$. $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$.

$z(t) = f(x(t), y(t)) = 2(\cos t)^3 \sin t$.

ふつうに微分すると

$$\frac{dz}{dt} = 6(\cos t)^2(-\sin t)\sin t + 2(\cos t)^4$$
$$= -6(\cos t)^2(\sin t)^2 + 2(\cos t)^4$$

一方 $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3$

$$\frac{dx}{dt} = (\cos t)' = -\sin t,\quad \frac{dy}{dt} = \cos t.$$

よって $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}} \cdot \dfrac{dx}{dt} + \boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}} \cdot \dfrac{dy}{dt}$

$$= \boxed{6x(t)^2 y(t)} \cdot (-\sin t)$$
$$+ \boxed{2x(t)^3} (\cos t)$$

$x(t) = \cos t$
$y(t) = \sin t$

$$= 6(\cos t)^2 \sin t(-\sin t) + 2(\cos t)^3 \cos t$$

$$= \frac{dz(t)}{dt} \;/\!/$$

証明（連鎖律）

$$\frac{dz(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h}$$

微分の定義

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(x(t+h), y(t+h)) \boxed{- f(x(t), y(t+h))}\right)$$
$$+ \frac{1}{h}\left(\boxed{f(x(t), y(t+h))} - f(x(t), y(t))\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\underbrace{\left[\frac{f(x(t+h),\, y(t+h)) - f(x(t),\, y(t+h))}{\boxed{x(t+h)-x(t)}}\right]}_{\frac{\partial f}{\partial x}} \times \underbrace{\boxed{\frac{x(t+h)-x(t)}{h}}}_{\frac{dx}{dt}}$$

$$+ \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x(t),\, y(t+h)) - f(x(t),\, y(t))}{\boxed{y(t+h)-y(t)}}\right] \times \frac{\boxed{y(t+h)-y(t)}}{h}$$

ここで $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = \frac{dx(t)}{dt}$ かつ （偏微分の定義）

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x(t+h),\, y(t+h)) - f(x(t),\, y(t+h))}{x(t+h)-x(t)} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$(x(t+h)-x(t) \to 0)$

よって、$= \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}$

つまり $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

さっきのは1変数版の連鎖律

→ 2変数版にした場合はどうなるか？

定義 $x(u,v)$, $y(u,v)$ を u と v に関する D 上の 2変数関数とする

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (x(u,v),\ y(u,v)) \end{array} \quad \left(D=[a,b]\times[c,d]\right)$$

を変数変換という

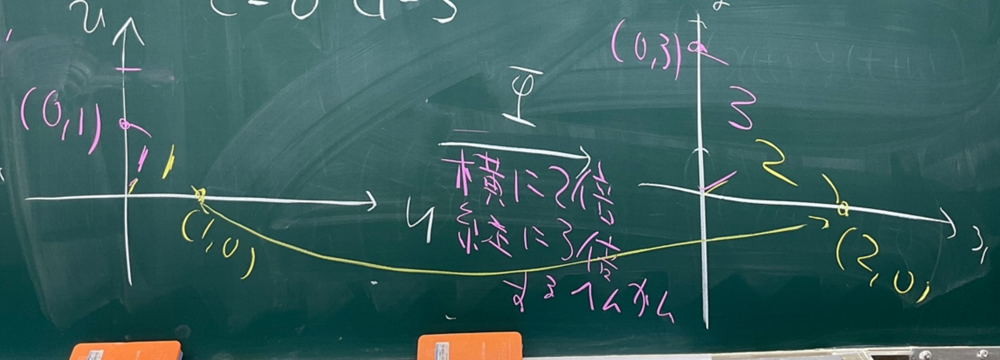
例 $\Phi(u,v) = (au+bv,\ cu+dv)$

$x(u,v) = au+bv$
$y(u,v) = cu+dv$

1次変換ともいう

例えば $a=2,\ b=0$
$c=0\quad d=3$

$\Phi(u,v) = (2u,\ 3v)$

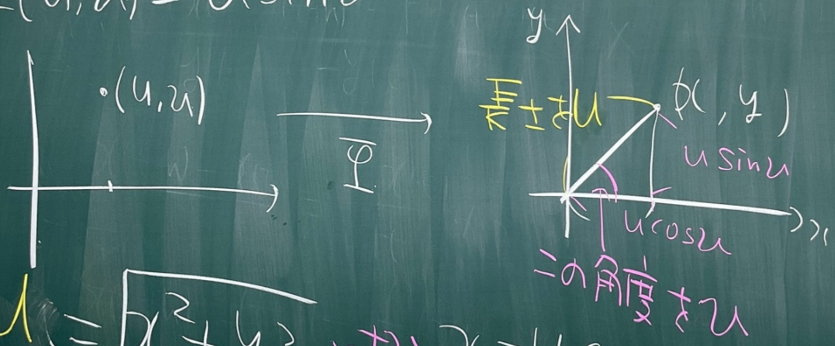


例11.2 $\Phi(u,v)=(u\cos v,\ u\sin v)$

$x(u,v)=u\cos v$

$y(u,v)=u\sin v$

極座標変換



$u=\sqrt{x^2+y^2}$, とすると $x=u\cos v$

$y=u\sin v$ //

定理(2変数版の連鎖律)

$\Phi: D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を変数変換とする

$(u,v)\longmapsto (x(u,v),y(u,v))$

$f(x,y)$ を x,y に関する2変数関数とする

$g(u,v)=f(\Phi(u,v))=f(x(u,v),y(u,v))$

となる u,v に関する2変数関数とすると

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

後期でやる行列を用いると

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)\boxed{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}}$$

(ヘッセ行列)

とかける

$\boxed{例}$ $f(x,y) = 2x^3y$

$\Phi(u,v) = (u\cos v,\ u\sin v)$

$$g = f(\Phi(u,v)) = 2(u\cos v)^3(u\sin v)$$
$$= 2u^4(\cos v)^3(\sin v)$$

ふつうにやると

$$\frac{\partial g}{\partial u} = 8u^3(\cos v)^3(\sin v)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = -6u^4(\cos v)^2(\sin v)^2 + 2u^4(\cos v)^4$$

連鎖律をつかうと ($x=u\cos v,\ y=u\sin v$)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2y,\quad \frac{\partial x}{\partial u}=\cos v,\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-u\sin v$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x^3,\quad \frac{\partial y}{\partial u}=\sin v,\quad \frac{\partial y}{\partial v}=u\cos v$$

よって $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}}$

$$=6x(u,v)^2y(u,v)\cdot\cos v+2x(u,v)^3\sin v$$

$$=6u^3(\cos v)^3\sin v+2u^3(\cos v)^3\sin v$$

$$=8u^3(\cos v)^3\sin v=\boxed{\frac{\partial g}{\partial u}}\ //$$

また $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v}+\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}$

$$=\boxed{6x(u,v)^2y(u,v)}(-u\sin v)+\boxed{2x(u,v)^3}(u\cos v)$$

$$=-6u^4(\cos v)^2(\sin v)^2+2u^4(\cos v)^4=\frac{\partial g}{\partial v}$$

例 $f(x,y)$ x,yの2変数関数として

$\Phi(u,v)=(u\cos v,\ u\sin v)$とする.

$g(u,v)=f(\Phi(u,v))=f(u\cos v,\ u\sin v)$

とするとき

$\dfrac{\partial g}{\partial u}$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ で表わせ.

解 連鎖律より（2変数の連鎖律の証明は1変数とほぼ同じ）

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

である

よって ○ で囲ったものがわかればよく

$$\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\sin v \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial u}=\cos v,\ \frac{\partial y}{\partial u}=\sin v,\ \frac{\partial x}{\partial v}=-u\sin v,\ \frac{\partial y}{\partial v}=u\cos v$$

より

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\overset{\frac{\partial x}{\partial u}}{\boxed{\cos v}}+\frac{\partial f}{\partial y}\overset{\frac{\partial y}{\partial u}}{\boxed{\sin v}},$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}(-u\sin v)+\frac{\partial f}{\partial y}u\cos v \quad //$$