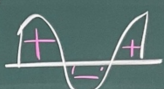
来週 6/6 (13:30−15:00) 演習

前回 積分＝符号つきの面積 

$f(x)$：$[a, b]$ 上の関数

$F(x)$：$F'(x) = f(x)$ なる関数

$$\int_a^b f(x) \underset{\uparrow}{=} \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

"微分積分学の基本定理"

$$F(x) = \int f(x)\,dx\ (+C)$$ 不定積分

例 $\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ $\left(\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2 \text{ より}\right)$

(命
(1)
(2
(3

(命題) $f(x)$, $\underbrace{g(x)}_{G(x)}$：$[a, b]$ 上の関数。 $\boxed{G'(x) = g(x)}$ とする。

(1) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

(2) k：実数のとき $\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

(3) (置換積分法) $x(t)$：$[\alpha, \beta] \to [a, b]$，$t \longmapsto x(t)$

かつ $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ のとき

$$\int_a^b \underbrace{f(x)dx}_{x\text{で積分}} = \int_\alpha^\beta \underbrace{f(x(t))\boxed{\frac{dx(t)}{dt}}}_{t\text{で積分}} dt$$ となる

(おつり)

ような書き方で $\int f(x(t))\frac{dx}{dt}dt = \int f(x)\,dx$

(約分されてる感じ)

④(部分積分法)

$$\int_a^b f(x)g(x) = \underbrace{\left[f(x)G(x)\right]_a^b}_{(f(b)G(b)-f(a)G(a))} - \int_a^b f'(x)G(x)$$

補足 これらは不定積分($\int f(x)\,dx$)でも成りたつ

例 $\int \underbrace{(\sin t)^2}_{f(x(t))}\underbrace{\cos t}_{\frac{dx(t)}{dt}}\,dt$ の不定積分を置換積分で求める

$f(x)=x^2$. $x(t)=\sin t$ とおく

$f(x(t))=(\sin t)^2$. $\frac{dx(t)}{dt}=(\sin t)'=\cos t$

よって $\int(\sin t)^2(\cos t)\,dt = \int \underbrace{f(x(t))}_{(\sin t)^2}\underbrace{\frac{dx(t)}{dt}}_{(\cos t)}\,dt$

③より $\int f(x)\,dx = \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 \underset{x=\sin t}{=} \frac{1}{3}(\sin t)^3$

実際 $\dfrac{d\left(\frac{1}{3}(\sin t)^3\right)}{dt} = 3\times\frac{1}{3}(\sin t)^2\cos t = (\sin t)^2 \times \cos t$

になっている。

$\boxed{例}$ $\int \log x\,dx$ を部分積分法で求める

$f(x)=\log x$, $g(x)=1$, $G(x)=x$ とおく

$(G'(x)=g(x))$

$$\int \log x\,dx = \int \underbrace{f(x)}_{\log x}\underbrace{g(x)}_{1}\,dx$$

部分積分法 →

$$= \underbrace{f(x)}_{\log x}\underbrace{G(x)}_{x} - \int \underbrace{f'(x)}_{\frac{1}{x}}\underbrace{G(x)}_{x}\,dx$$

$$= x\log x - \int \frac{1}{x}x\,dx$$

$$= x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x\ \underbrace{(+C)}_{積分定数}$$

実際 $(x\log x - x)'$

$$= x'\log x + x(\log x)' - x'$$

$$= \log x + x\times\frac{1}{x} - 1 = \log x$$ となっている。

$\boxed{証}$ 積分の性質から $F'(x)=f(x)$ なら

$$F(x)=\int f(x)\,dx + C \quad となる$$

(もしくは $[F(x)]_a^b = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$ となる) ☆

(1) $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$ となる F, G をとると

$$(F+G)' = F'+G' = f+g$$

(微分の性質)

よって
$$\int_a^b f+g\,dx = [F+G]_a^b = (F(b)-F(a)) + (G(b)-G(a))$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
(☆より)

(1)の引き算と(2)も同様

(3) $F'(x)=f(x)$ なる $F(x)$ をとる

$$\frac{d}{dt}\left(F(x(t))\right) = f(x(t))\cdot\frac{dx}{dt}$$

(合成関数の微分)

$$\Longrightarrow [F(x(t))]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f(x(t))\frac{dx}{dt}$$

一方で
$$[F(x(t))]_\alpha^\beta = F(x(\beta)) - F(x(\alpha))$$
$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

($F'(x)=f(x)$ より $[F(x)]_a^b = \int_a^b f(x)\,dx$)

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\frac{dx}{dt}\,dt$$

(4) $G'(x) = g(x)$ より

$(f\cdot G)' \underbrace{=}_{\text{積の微分}} f'G + fg$ より $\left(\begin{array}{l} F' = f \\ \Rightarrow F = \int f\,dx \end{array}\right)$

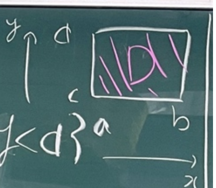
$\Rightarrow fG = \int (f'G + fg)\,dx$

$\Rightarrow \int_a^b fg\,dx = \left[fG\right]_a^b - \int_a^b f'G\,dx$

(ここまでが
$\underline{\text{高校(理系)}} + \underline{\alpha\text{(テイラー展開)}}$)

5. 2変数の微分

以下、領域 $D = (a,b)\times(c,d)$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a<x<b,\ c<y<d\}$

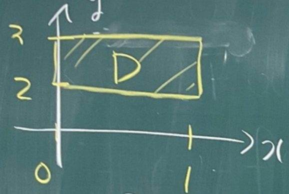


$\boxed{\text{定義}}$ $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto f(x,y)$ を2変数関数という

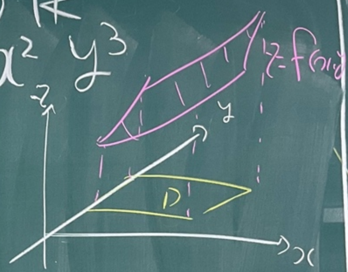
つまり
任意の $(x,y) \in D$ について $f(x,y) \in \mathbb{R}$ がさだまるとき
$f(x,y)$ を D 上の関数という

例 $f: (0,1)\times(2,3) \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto x^2 y^3$



グラフ



$g: (0,1)\times(2,3) \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto \begin{cases} 1 & x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$

全部2変数関数

定義(グラフ)

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=f(x,y)\}$ を $z=f(x,y)$ のグラフという

2変数関数はいっぱいあるが
以下授業では次を仮定する

(このとき f は C^∞ 級とよばれる)

仮定 任意の $(a,b)\in D$ について
$f(x,b)$ は x の関数とみて C^∞ 級
$f(a,y)$ は y の 〃 C^∞ 級

例1 $f(x,y)=x^2y^3$ は仮定をみたす

(a,b)∈D

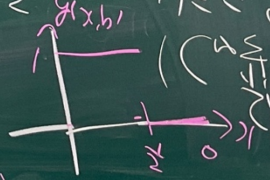
$f(x,b)=x^2b^3$ C^∞級 （xで何回でも偏微分できる）

$f(a,y)=a^2y^3$ C^∞級

（例 $\frac{df}{dx}(x,b)=2xb^3$, $\frac{d}{dy}f(a,y)=3a^2y^2$）

例2 $g(x,y)=\begin{cases}1 & x\le\frac{1}{2}\\ 0 & x>\frac{1}{2}\end{cases}$ 仮定をみたさない。

例えば $g(x,b)=\begin{cases}1 & x\le\frac{1}{2}\\ 0 & x>\frac{1}{2}\end{cases}$



（C^∞級でない）

補足 だいたいの関数はこの仮定をみたす

（$e^x\sin y$, $x^2\cos y$, $e^{x^2+y^3}$, ……）

定義（偏微分）

$f(x,y)$: D上の関数について、$(a,b)\in D$について、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}$$ とし、

「$f(x,y)$ の (a,b) の偏微分係数とよぶ」

$\boxed{\text{補足}}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{df(x,b)}{dx}$ の $x=a$ での値

← $f(a,b)$ aを $f(x,b)$ にかえすかんじ

$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \frac{df(a,y)}{dy}$ の $x=b$ での値

$\boxed{\text{例}}$ $f(x,y) = x^2 y^3$

$(a,b) \in D$ として $f(x,b) = x^2 b^3$ $\quad \frac{df(x,b)}{dx} = 2xb^3$

$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = \left(\frac{df(x,b)}{dx} \text{ の } x=a \text{ の値} \right)$

$= 2ab^3$ $\quad$ (yをbに固定して xで微分する)

aを代入

同様に $f(a,y) = a^2 y^3$ $\quad \frac{df(a,y)}{dy} = 3a^2 y^2$

$\Rightarrow \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = \left(\frac{df(a,y)}{dy} \text{ の } y=b \text{ での値} \right)$

(xをaに固定して yで微分する) $= 3a^2b^2$

bを代入

例12 $f(x,y)=e^{x}\sin y$

$(a,b)\in D$ での偏微分係数の値は

・ $f(x,b)=e^{x}\underbrace{\sin b}_{\text{ていすう}} \Rightarrow \dfrac{\partial f(x,b)}{\partial x}=e^{x}\sin b$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}=(e^{x}\sin b\text{ に }x=a\text{ を代入})=e^{a}\sin b$

・ $f(a,y)=\underbrace{e^{a}}_{\text{定数}}\sin y \Rightarrow \dfrac{\partial f(a,y)}{\partial y}=e^{a}\cos y$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f(a,b)}{\partial y}=(e^{a}\cos y\text{ に }y=b\text{ を代入})=e^{a}\cos b$

$\boxed{\text{例13}}$ $f(x,y)=x^{2}\cos y$

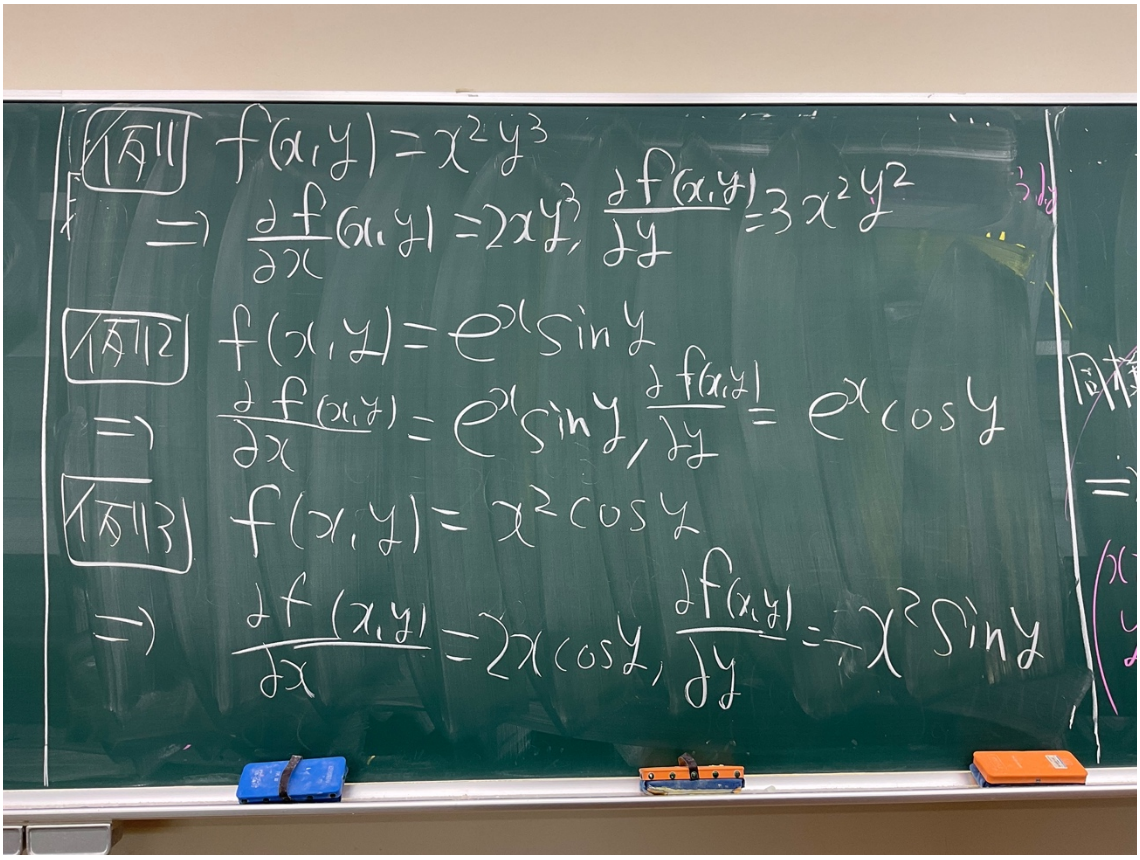
$\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}=2a\cos b \qquad \dfrac{\partial f(a,b)}{\partial y}=-a^{2}\sin b$

$\boxed{\text{定義}}$ D上の関数 $f(x,y)$ について

$$\frac{\partial f}{\partial x}: D \longrightarrow \mathbb{R},\quad (x,y)\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}: D \longrightarrow \mathbb{R},\quad (x,y)\longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

を $f(x,y)$ の偏導関数という

((a,b)の代わりに(x,y)に書いただけ)



例1 $f(x,y) = x^2y^3$
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2y^2$
例2 $f(x,y) = e^x \sin y$
$\Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^x \sin y, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^x \cos y$
例3 $f(x,y) = x^2 \cos y$
$\Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x \cos y, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x^2 \sin y$