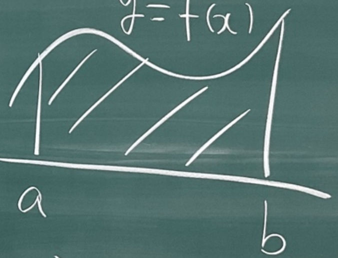
今学期の後半…積分と2変数の微分

積分＝図形の面積を求める

面積 $=\int_a^b f(x)\,dx$



(1700 ニュートン?)

↓ブレイクスルー

積分は微分の逆演算

$\boxed{\text{定義}}$ ・F(x)が微分可能で $F'(x)=\frac{dF}{dx}=f(x)$ と
なるとき F(x)をf(x)の不定積分といい
(もしくは原始関数)
$F(x)=\int f(x)\,dx$ とかく

・f(x)の不定積分は定数の差を除いて定まるので その差をCとかき積分定数という
(あまり重要でない)

$\boxed{例}$ $F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ とすると $F'(x)=x^n$ $(n\neq -1)$

よって $F(x)$ は x^n の不定積分

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int x^n\,dx$$

一方, $G(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+5$ とすると $G'(x)=x^n$

つまり 不定積分は定数差のちがいがある

⇝ $\displaystyle\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ とかく

(Cは積分定数)

$\boxed{例}$ ・$\alpha\neq -1$ のとき (以下, Cを積分定数とする)

$$\underbrace{\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)}_{F(x)}'=\frac{(\alpha+1)x^{\alpha}}{\alpha+1}=\underbrace{x^{\alpha}}_{f(x)}\Longrightarrow\int x^{\alpha}\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$$

・$(x>0)$ $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ $\Longrightarrow \displaystyle\int\frac{1}{x}\,dx=\log x+C$

・$(e^x)'=e^x$ $\Longrightarrow \displaystyle\int e^x\,dx=e^x+C$

・$\left(\dfrac{a^x}{\log a}\right)'=\dfrac{(\log a)a^x}{\log a}=a^x\Longrightarrow\displaystyle\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\log a}+C$

$(a>0$ かつ $a\neq 1)$

・ $\underbrace{(x\log x - x)'}_{F(x)} = (x\log x)' - (x)'$

$(fg)' = f'g + fg'$

$= \log x + x\cdot\frac{1}{x} - 1$

$= \underbrace{\log x}_{f(x)}$

$\Rightarrow \int \log x\,dx = x\log x - x + C$

$\boxed{F'(x) = f(x) \ \Downarrow\ \int f(x)dx = F(x) + C}$

・ $(-\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$

$\Rightarrow \int \sin x\,dx = -\cos x + C$

・ $(\sin x)' = \cos x \Rightarrow \int \cos x\,dx = \sin x + C$

1° $(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2} \Rightarrow \int \frac{1}{(\cos x)^2}dx = \tan x + C$

"不定積分 = 微分の逆演算"

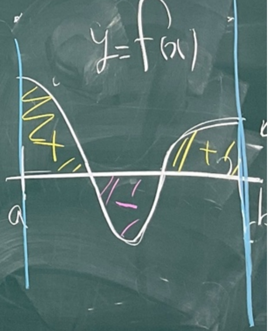
定義 f(x)を[a, b]上の連続関数

y=f(x)と直線x=a, x=bで

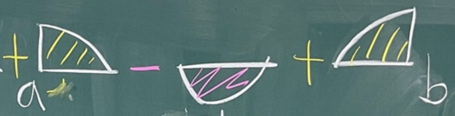
囲まれた部分の面積を

x軸より上の部分は正

x軸より下の部分は負として加えたものを



$\int_a^b f(x)\,dx$ とかき $f(x)$ の $[a,b]$ における定積分という

(図でみると $\int_a^b f(x)\,dx = +$ )

また $a<b$ のとき $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ とする

定理(微分積分学の基本定理)

$f(x)$ を $[a,b]$ 上の連続関数

$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ (= 

a から x までの f(x)の面積

とおくと $f(x)$ の不定積分となる。

つまり $(F(x))' = \left(\int_a^x f(x)\,dx\right)' = f(x)$

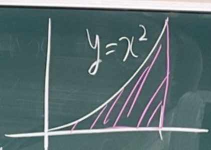
特に $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

(y=f(x)を積分(面積求める)して微分すると元に戻る

系 $f(x)$ を $[a,b]$ 上の連続関数
$G(x)$ を $G'(x)=f(x)$ となる関数としたとき
$\int_a^b f(x)dx = G(b)-G(a)$ となる

証 $G'(x)=f(x)$ である
一方 $F(x)=\int_a^x f(x)dx$ とおくと 基本定理より
$F'(x)=f(x)$ ∴ あるCがあって $\boxed{F(x)=G(x)+C}$
よって基本定理より $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = G(b)-G(a)$

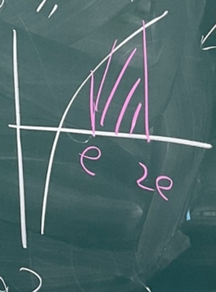
例 $y=x^2$ と $x=0$, $x=1$ で囲まれる面積



$G(x)=\frac{1}{3}x^3$ とおくと $G'(x)=x^2$

$$\Longrightarrow \int_0^1 x^2 dx \underset{\text{左の系}}{=} G(1)-G(0) = \frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{1}{3} \;//$$

例 $y=\log x$ と $x=e$ と $x=2e$ で囲まれる面積

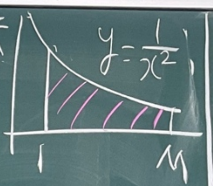


$(x\log x - x)' = \log x$ より

$$\int_e^{2e} \log x\, dx = (2e\log 2e - 2e) - (e\log e - e)$$
$$= (2e\log 2 + 2e - 2e) - 0 = 2e\log 2 \;//$$

例13 $y=\frac{1}{x^2}$ と $x=1$ と $x=M$ で囲まれる面積

(自然数 >1)

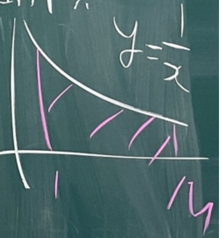


$\left(-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}$ より

$$\int_1^M \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{M}-\left(-\frac{1}{1}\right)=1-\frac{1}{M}$$

$$\left[-\frac{1}{x}\right]_1^M$$

例14 $y=\frac{1}{x}$ と $x=1$ と $x=M$ で囲まれる面積



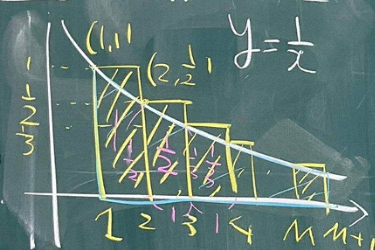
$(\log x)'=\frac{1}{x}$ より

$$\int_1^M \frac{1}{x}dx = \log M-\log 1=\log M \;/\!/$$

応用 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ は $+\infty$ 発散する

$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$ は収束する

証 $S_M=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{M}$ とする



$S_M=$ (左の図の黄色の面積)

$\geq$ ($y=\frac{1}{x}$ と $x=1$ と $x=M+1$ に囲まれた面積)

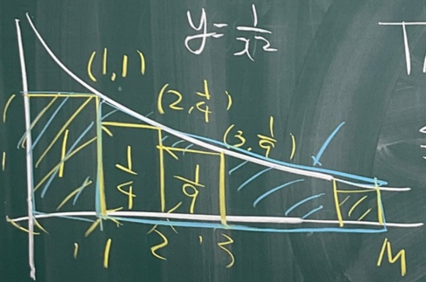
(青色)

(左) $=\log(M+1)$

よって $S_n \geqq \log(n+1)$.

$\lim_{n\to\infty}\log(n+1)=+\infty$ より $\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$

$T_n = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ とおく



$T_n =$ (左の図の黄色の面積)

$\leqq 1+$ ($y=\frac{1}{x^2}$ と $x=1$ と $x=n$ で囲まれる面積)

(青色)

$\underset{(右)}{=} 1+1-\frac{1}{n} = 2-\frac{1}{n}$

$\therefore T_n \leqq 2-\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=2$ かつ T_n 単調増加より $\lim_{n\to\infty}T_n$ は収束する

補足

- $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots = \frac{\pi^2}{6}$ (オイラーがといたバーゼル問題)
- $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots = \frac{\pi^4}{90}$
- $1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\cdots = \frac{\pi^6}{945}$

証明（微分積分学の基本定理）

$F(x)=\int_a^x f(x)dx$ とおく

（図の赤色の面積

知りたいのは $\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ の値、

$h>0$として、

$M(x)=$（$f(x)$のxから$x+h$までの最大値）

$m(x)=$（　〃　　最小値）

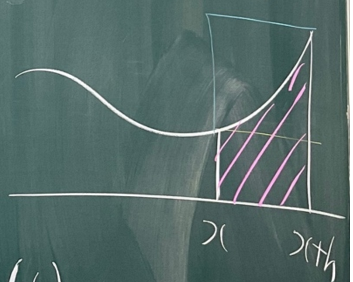
ここで $m(x)h$（右の黄色の面積）を考える

$M(x)h$（右の青色の面積）

すると $\int_x^{x+h} f(x)dx$（右の赤の面積）として

$$m(x)h \leqq \int_x^{x+h} f(x)dx \leqq M(x)h$$

黄色　　赤色　　青色

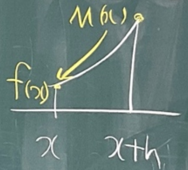


$$m(x) \leqq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx \leqq M(x)$$

（hでわる）

ここで f は連続より

$\lim_{h\to 0} M(x) = \lim_{h\to 0}$ {$f(x)$ の x から $x+h$ までの最大値}



$= f(x)$

同様に

$\lim_{h\to 0} m(x) = f(x)$ となる

$\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(x)\,dx$ より

はさみうちの原理から $\lim_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$

$\therefore\ F'(x) = f(x)$ //

補足 この証明は面積を感覚的に扱ってる部分に穴がある

(そもそも"面積"を定めるのは非常に難しい

バナッハ-タルスキーのパラドックス(定理)

半径1の球体を適切に分割してうまくくっつけると、半径1の球体を2つつくることができる