3.1変数の微分 2階以上の微分

定義 $f(x)$: 区間 I 上の関数

$f'(x)$ が微分可能であるとき

$$f''(x) = (f'(x))' \quad \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \text{ とも書く}\right)$$

を2次の導関数とよぶ

同様に $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ を

($f(x)$ を n 回微分する)

n 次導関数とよぶ

例 $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x \quad f''(x) = (f'(x))' = (e^x)' = e^x$

$f^{(n)}(x) = (e^x$ を n 回微分したもの$) = e^x$

例2 $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = (f'(x))' = -\sin x$

$f^{(3)}(x) = (-\sin x)' = -\cos x,\quad f^{(4)}(x) = (-\cos x)' = \sin x = f(x)$

$f^{(5)}(x) = (f(x))' = f^{(1)}(x) = \cos x, \ldots$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & n = 0, 4, 8, \cdots \\ \cos x & n = 1, 5, 9, \cdots \\ -\sin x & n = 2, 6, 10 \cdots \\ -\cos x & n = 3, 7, 11 \cdots \end{cases} = \begin{cases} (-1)^m \sin x & n = 2m \\ (-1)^m \cos x & n = 2m+1 \end{cases}$$

定義 ・n自然数について$f^{(n)}(x)$が連続のときfはC^n級

・任意の自然数nについてfがC^n級のときfをC^∞級という

補足 fがC^∞級 $\Leftrightarrow$ 何回でも微分できる

例 $x^n, e^x, \sin x, \cos x, \ldots$ はC^∞級

(これからでてくる関数はほとんどC^∞級)

定理（テイラーの定理）

$f(x)$ 区間 I 上 C^∞ 級関数

$a<b$ なる $a, b \in I$ について，

ある $c \in (a, b)$ があって

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \boxed{\frac{f''(c)}{2}}(b-a) \text{ となる}$$

$\boxed{\text{例}}$ $f(x) = e^x$, $a=0$ とすると $c \in (0, b)$ があって

$$e^b = f(b) = f(0) + f'(0)b + \frac{f''(c)}{2}b^2$$

テイラーの定理

$$= 1 + b + \frac{e^c}{2}b^2 \text{ //.}$$

ここで $e^c \geqq 1$ ($c \geqq 0$ より) から

$$e^b = 1 + b + \frac{e^c}{2}b^2 \geqq 1 + b + \frac{1}{2}b^2 \text{ //.}$$

特に $e \geqq 1 + 1 + \frac{1}{2}1^2 = \frac{5}{2}$.

$\boxed{\text{証}}$（テイラーの定理）

$$A = \frac{1}{(b-a)^2}\{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)\} \text{ とおく}$$

示すことは「ある $c \in (a, b)$ で $A = \frac{1}{2}f''(c)$ となる

c が存在すること」

$F(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - A(b-x)^2$ とおく.

すると $F(b) = 0$

$F(a) = 0$ (Aの定義から)

よって平均値の定理から ある$c \in (a,b)$があって

$$F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = 0$$

$$F'(x) = -f'(x) - f''(x)(b-x) + f'(x) + 2A(b-x)$$ より

$$0 = F'(c) = -f''(c)(b-c) + 2A(b-c).$$

$\therefore\ A = \frac{1}{2} f''(c),$

$\boxed{\text{定理}}$ (極値判定法)

① $f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ なら
$f(x)$は$x=a$で極小

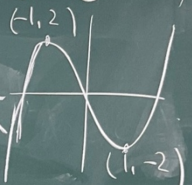
② $f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ なら
$f(x)$は$x=a$で極大

例Ⅲ $f(x)=x^3-3x$. $f'(1)=f'(-1)=0$

$f''(x)=(3x^2-3)'=6x$

$f''(-1)=-6<0 \Rightarrow f(x)$ は $x=-1$ で極大

$f''(1)=6>0 \Rightarrow f(x)$ は $x=1$ で極小



証 ① a の近くで $f''(x)>0$ となるようにしてよい。

すると a の近くの x について、ある c があって

$$f(x)=f(a)+\underbrace{f'(a)}_{0}(x-a)+\frac{f''(c)}{2}(x-a)^2$$

(テイラーのていり)

$$=f(a)+\frac{f''(c)}{2}(x-a)^2 > f(a)$$

//

定理 テイラーの定理(n階微分版)

$f(x)$ 区間 I 上の C^∞ 級関数

$a<b$ なる $a,b\in I$ について ある $c\in(a,b)$ があって

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2}(b-a)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(b-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

//

$3!=3\times2\times1$

$n!=n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1$

証明は $n=2$ のときと同じ

例1 $f(x)=e^x$, $a=0$. $f^{(n)}(x)=e^x$

よって $b>0$ について ある $c\in(0,b)$ で

$$e^b=f(b)=f(0)+f'(0)b+\frac{f''(0)}{2}b^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}b^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}b^n$$

テイラーの定理

$$=1+b+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{3!}b^3+\cdots+\frac{b^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{e^c}{n!}b^n$$

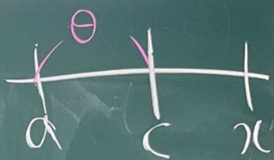
$c>0$ より $e^c\geqq 1$ より

$$e^b>1+b+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{3!}b^3+\cdots+\frac{b^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}b^n$$

特に $e=e^1>1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\cdots+\frac{1}{n!}$ //

ここで $b=x$ としたとき,

$c\in(a,x)$ より $\theta=\frac{c-a}{x-a}$ と



おくと

$c=a+\theta(x-a)$ とかける

これを用いてテイラーの定理を

かきなおすと...

定理

$a<x$ について、ある $\theta\in(0,1)$ があって、

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

これを $x=a$ における有限テイラー展開という。

$R_n=\dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ を剰余項という

$a=0$ のとき 有限マクローリン展開という

例1 $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n$

例2 $f(x)=\sin x$ $\quad f^{(n)}(x)=\begin{cases}\sin x & n=0,4,8,\ldots\\ \cos x & n=1,5,9,\ldots\\ -\sin x & n=2,6,10,\ldots\\ -\cos x & n=3,7,11,\ldots\end{cases}$

よって $f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n=0,2,4,6,\ldots\\ 1 & n=1,5,9,\ldots\\ -1 & n=3,7,11,\ldots\end{cases}$ となる。

テイラー展開

$$\sin x=f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(2n-1)}(x)}{(2n-1)!}x^{2n-1}+R_{2n}$$

$f^{(n)}(0)$ を代入

$$= 0 + 1\cdot x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 - \frac{0}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + R_{2n}$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + R_{2n} \quad //$$

テイラー展開において、$R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ となるとき
次の展開がえられる。

$\boxed{\text{定理}}$ テイラー展開において $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$
となるとき

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots\cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$ となる。

これをべき級数展開という

【例1】 $f(x)=e^{x}$, $f^{(n)}(x)=e^{x}$ 特に $f^{(n)}(0)=1$

$R_n(x)=\dfrac{e^{\theta x}}{n!}x^n$ で $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$

よって $e^{x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$a=0$ のべき級数展開

$$=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

特に $e=e^1=1+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots$

【例2】 $f(x)=\sin x \Rightarrow f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n=2m\\ (-1)^m & n=2m+1\end{cases}$

べき級数展開

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots$$

【例3】 $f(x)=\cos x \Rightarrow f^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^m & n=2m\\ 0 & n=2m+1\end{cases}$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots$$

ここで i を虚数単位（$i^2=-1$ なる数）とし

$$e^{z}=1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{4!}z^4+\frac{1}{5!}z^5+\cdots$$

に

$z=ix$ を代入すると

$$e^{ix}=1+ix+\frac{1}{2}(ix)^2+\frac{1}{3!}(ix)^3+\frac{1}{4!}(ix)^4+\frac{1}{5!}(ix)^5+\cdots$$

（$i^2=-1$ をつかう）

$$=1+ix-\frac{1}{2}x^2-\frac{i}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{i}{5!}x^5+\cdots$$

$$=\underbrace{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots}_{=\cos x}$$

$$+i\Bigl(\underbrace{x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots}_{=\sin x}\Bigr)$$

$$=\cos x+i\sin x$$

$$\therefore\ e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

$\boxed{\text{オイラーの公式}}$

特に $e^{i\pi}=\cos\pi=-1$