微分

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$h = x-a$

$x \to a \iff h \to 0$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = \sin x$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

$\boxed{\text{命題}}$ $(a^x)' = (\log_e a)\, a^x$ 特に $(e^x)' = e^x$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{(\log a)\, x}$ 特に $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

$\boxed{\text{証}}$ $a=e$の場合 (e : ネイピア数 $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

前回示した $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log(h+1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ を使うと

$$(e^x)' \underset{\text{定義}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} \underset{e^x\text{でくくる}}{=} e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} \underset{(\text{上から})}{=} e^x$$

$$(\log x)' \overset{\text{定義}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{x\times\frac{h}{x}}$$

$\frac{h}{x}\to 0$
$\Leftrightarrow h\to 0$

$$= \lim_{\frac{h}{x}\to 0}\frac{1}{x}\times\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \overset{\text{左の式}}{=} \frac{1}{x}$$

$a\neq e$のとき $a^x = e^{(\log a)x}$

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{e^{(\log a)(x+h)} - e^{(\log a)x}\right\}$$

$(\log a)h\to 0$
$\Leftrightarrow h\to 0$

$$= e^{(\log a)x}\times\log a\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{(\log a)h}\left\{e^{(\log a)h}-1\right\} = (\log a)a^x$$

$\log_a x = \frac{\log x}{(\log a)}$ (底の変換公式)

$$(\log_a x)' = \frac{(\log x)'}{\log a} = \frac{1}{(\log a)x}$$

定理 合成関数の微分法

$y=f(x)$がaで微分可能

$z=g(y)$が$f(a)$で 〃 のとき

$z=g(f(x))$も$x=a$で微分可能で

$$g(f(a))' = g'(f(a))\times f'(a)$$

[例] $z=(x^2+1)^3$ の $x=a$ での微分

$f(x)=x^2+1,\quad g(y)=y^3 \Rightarrow g(f(x))=(x^2+1)^3$

$f'(x)=2x \qquad g'(y)=3y^2,\qquad f(a)=(a^2+1)$

合成関数の微分法より

$$g(f(a))' = g'(f(a))\times f'(a)$$
$$= g'(a^2+1)\times 2a$$
$$= 3(a^2+1)^2\cdot 2a$$

[例] $x^{\alpha}=e^{(\alpha\log x)}$ の微分

$f(x)=\alpha\log x \qquad g(y)=e^{y} \Rightarrow g(f(x))=e^{\alpha\log x}$

$f'(x)=\dfrac{\alpha}{x} \qquad g'(y)=e^{y}$ より

$$g(f(x))' = g'(f(x))\times f'(x)$$
$$= e^{f(x)}\times f'(x)$$
$$\left(\frac{1}{x}=e^{-\log x}\right)\quad = e^{\alpha\log x}\times\frac{\alpha}{x} = e^{(\alpha-1)\log x}\times\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\left(\begin{array}{l}(x^{\sqrt{2}})'=\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}\\ (x^{\pi})'=\pi x^{\pi-1}\\ (x^{5})'=5x^{4}\end{array}\right.$$

証明（合成関数の微分）

$$g(f(a))' = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \boxed{\frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)}} \times \boxed{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

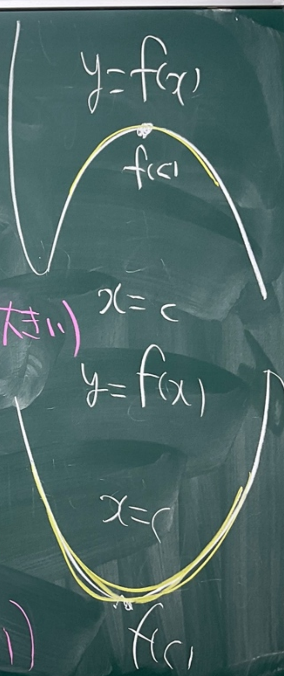
$h \to 0 \Leftrightarrow f(a+h) - f(a) \to 0$

$$= g'(f(a)) \times f'(a)$$

2.4 極値と平均値の定理

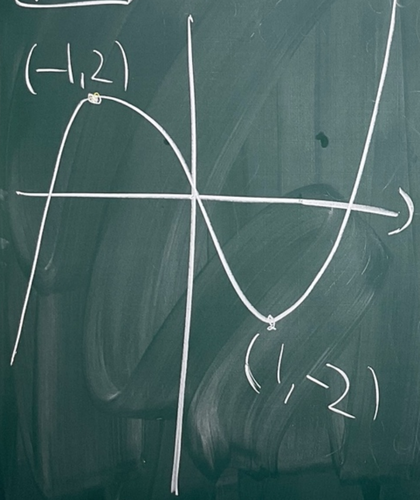
$\boxed{\text{定義}}$

- $f(x)$ が $x=c$ で極大とは
  c のまわりの点 d について $f(c) > f(d)$
  となること（c のまわりで $f(c)$ が一番大きい）
  $f(c)$ を極大値という
- $f(x)$ が $x=c$ で極小とは
  c のまわりの点 d について $f(c) < f(d)$
  （c のまわりで $f(c)$ が一番小さい）
  このとき $f(c)$ を極小値という



極大値と極小値をあわせて極値という

例 $y=x^3-3x$



$x=-1$ 極大

$f(-1)=2$ 極大値

$x=1$ 極小

$f(1)=-2$ 極小値

$f'(x)=3x^2-3$

$f'(1)=f'(-1)=0$

定理 $f(x)$ が $x=c$ で極値をもつなら $f'(c)=0$

証 $x=c$ で極大とする

$h>0$ としたとき $f(c+h)<f(c)$

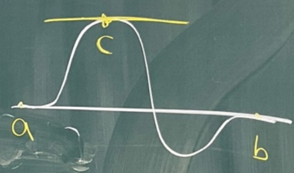
よって $\displaystyle\lim_{\substack{h>0\\h\to0}}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leqq0$ $\quad\therefore f'(c)\leqq0$

一方 $h>0$ として $f(c-h)<f(c)$

よって $\displaystyle\lim_{\substack{h>0\\h\to0}}\frac{f(c-h)-f(c)}{h}=-\lim_{-h\to0}\frac{f(c-h)-f(c)}{-h}=-f'(c)\leqq0$

$\therefore$ $f'(c) \leqq 0$ かつ $-f'(c) \leqq 0$ より $f'(c)=0$ //

$\boxed{\text{定理}}$ $f(x)$ が $[a,b]$ 上連続, (a,b) 上微分可能



① ロルの定理

$f(a)=f(b)$ なら $f'(c)=0$ なる
$c \in [a,b]$ がある

② 平均値の定理

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ なる $c \in (a,b)$ に存在する

(証明はあとで)

$\boxed{\text{系}}$ 任意の $x \in (a,b)$ で $f'(x)<0$ ならば
$f(x)$ は (a,b) 上 減少関数
($x<y \Rightarrow f(x)>f(y)$)

$\boxed{\text{証}}$ $a<x<y<b$ なる x, y について

平均値の定理から $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c)$ となる $c \in (x,y)$ はある

$f'(c)<0$ より $f(y)<f(x)$ //

$\boxed{\text{系}}$ ① (a,b) 上で $f'(x)=0$ なら 定数関数

② 〃 $f'(x)>0$ なら 増加関数

応用　微分をつかったグラフのかき方

$y=f(x)$ のグラフのかきかた

① $f'(x)=0$ の値をすべて求める

（例　$f'(-1)=f'(3)=0$）

② 増減表をかく

x		-1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

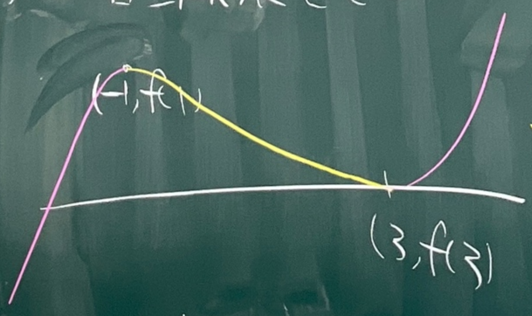
③ $(-\infty,-1)$, $(-1,3)$, $(3,\infty)$ 上で $f'(x)$ の正負をしらべる

例えば $(-\infty,-1)$ 上 $f'(x)>0$ なら $+$ と↗

$(-1,3)$ 上 $f'(x)<0$ なら $-$ と↘　を左のようにかく

$(3,\infty)$ 上 $f'(x)>$ なら $+$ と↗

④ 増減表をもとにグラフをかく



↗の区間は右上に

↘は右下に

ペンを走らせる

例 $y=x^3-3x$ のグラフ　$f(x)=x^3-3x$ とおく

① $f'(x)=0$ なるxをもとめる.

$f'(x)=3x^2-3$ より $x=\pm1$

② 増減表をかく

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

③ $(-\infty,-1)$上で$f'(x)>0$

$(f'(-2)=3\times(-2)^2-3=9>0$より$)$

⇒ ＋と↗を増減表に記入

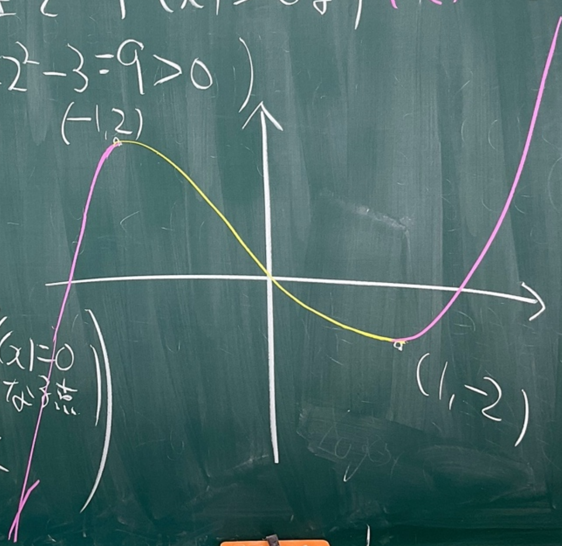
同様に $(-1,1)$上で $f'(x)<0$ から－と↘をかく

$(f'(0)=-3<0$より$)$

$(1,+\infty)$上で $f'(x)>0$ より＋と↗をかく

$(f'(2)=3\times2^2-3=9>0)$

④ グラフをかく



(極値をとる点($f'(x)=0$となる点)をかいておく)

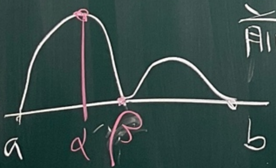
ロルの定理と平均値の定理の証明

① $f(a)=f(b) \Rightarrow$ ある $c\in[a,b]$ で $f'(c)=0$.

証 $[a,b]$ 上 $f(x)$ は最大値 $f(\alpha)$ と最小値 $f(\beta)$ が存在（最大最小の存在定理）

△1 $f(\alpha)=f(\beta)$ なら $[a,b]$ 上 f は定数関数
とくに $f'=0$

△2 $f(\alpha)>f(\beta)$ のとき $f(\alpha)\neq f(a)$ か $f(\beta)\neq f(a)$ のどちらかはおきる



前者のとき
$f(\alpha)$ は最大値より極大 よって $f'(\alpha)=0$

—後者も同様

② ある $c\in[a,b]$ で $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

証 $F(x)=f(x)-f(a)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a)$ とおく

$F(a)=0,\ F(b)=0$

ロルの定理より $F'(c)=0$ なる $c\in(a,b)$ とこがある

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ より}$$

$F'(c)=0$ より $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ //