1.5 指数関数 対数関数 無理関数

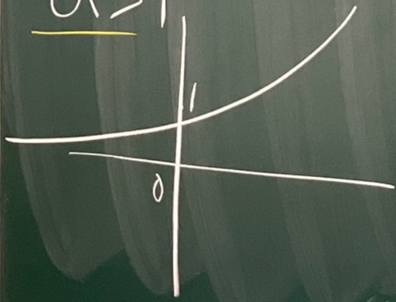
定義 指数関数 ← 連続関数

・$a>0$ かつ $a\neq 1$ aについて

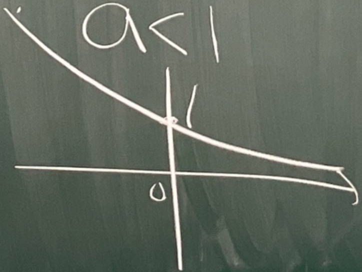
$$a^x : \mathbb{R} \longrightarrow (0,+\infty)$$
$$x \longmapsto a^x$$

$\left(a^2,\ a^5,\ a^{-3}=\frac{1}{a^3},\ a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a} \right.$

$a>1$



$a<1$



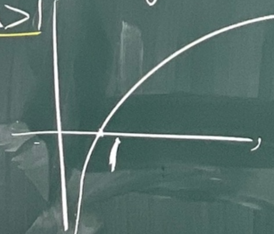
・対数関数

$a>0$ かつ $a\neq 1$ aについて $\log_a x$ を $a^y=x$ なる唯1つのyとする

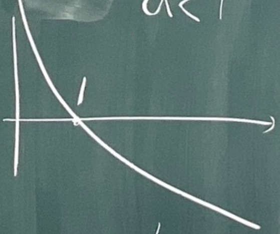
$\left(\log_a a^2 = 2,\ \log_a a^{-3} = -3 \right.$

$$\log_a x : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$a>1$



$a<1$



e=ネイピア数 $=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $2.718\cdots$

・e^x を $\exp x$ とかいたり $\log_e x$ を $\log x$ とかくこともある

補題 ① $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$ $\quad a^x = e^{(\log a)x}$

② $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=0 \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ ($\log x < x < e^x$ xが十分大きいとき)

③ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1 \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

証 ① $e^{(\log a)x} = e^{\log a^x} = a^x$ $\quad (e^{\log x}=x$

$\log xy = \log x + \log y$

$c\log x = \log x^c$

指数法則

・$b = \log_a x$ とおくと $a^b = x$

→ log をとる $\log x = \log a^b = b\log a$

∴ $b = \dfrac{\log x}{\log a}$

② $e \geqq 2$ より $e^x \geqq 2^x \boxed{\geqq} x^2$ (xが大きいとき) (帰納法)

よって $\displaystyle 0 \leqq \frac{x}{e^x} \leqq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} 0 = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ よりはさみうちから $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

また $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = \lim_{t\to\infty}\frac{\log e^t}{e^t} = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t} = 0$ $\quad \boxed{x=e^t}$

③ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$t=\frac{1}{x}$ $\displaystyle= \lim_{t\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}$

$x\to0 \iff t\to\infty$

(ネピア数) $= \log_e e = 1$

$\boxed{\text{定義}}$ 無理関数 ($2^{2.7}, 2^{\sqrt{3}}, 2^{\pi}$)

実数αに対して $x^{\alpha} = e^{\alpha\log x}$ とする。

$x^{\alpha} : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$x \longmapsto x^{\alpha}$

③ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x} = \lim_{t\to0}\frac{t}{\log(1+t)} = 1$

$t=e^{x}-1$

$x=\log(1+t)$

$x\to0\iff t\to0$

$\boxed{\text{補題}}$

① nが自然数のとき x^{n} はxのn乗, $x^{-n}=\frac{1}{x^{n}}$

② $(x^{\frac{1}{n}})^{n} = x$ とくに $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$

無理関数 = べき乗、平方根の拡張

証 $x^n \underset{\boxed{今の定義}}{=} e^{n\log x} = e^{\log x^n} \underset{\boxed{従来の定義}}{=} x^n$

$$x^{-n} = e^{-n\log x} = (e^{\log x^n})^{-1} = (x^n)^{-1} = \frac{1}{x^n}$$

$$(x^{\frac{1}{n}})^n = (e^{\frac{1}{n}\log x})^n = e^{\log x} = x$$

$(e^a)^b = e^{ab}$

補足 今回2^πなどを定義するのに

$2^\pi = e^{\pi \log 2}$ とするものとした定義を採用した

2 1変数の微分

定義 $f(x)$を点aを含む開区間I上の関数

$f(x)$が$x=a$で微分可能とは

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$ が存在すること

収束し

この値を$f'(a)$とかく。

fがIの点で微分可能のとき fはI上微分可能という

$$f' : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f'(x)$$ を導関数という

例1 $f(x)=x^2 \quad a=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0$$

一般に $f'(x)=2x$

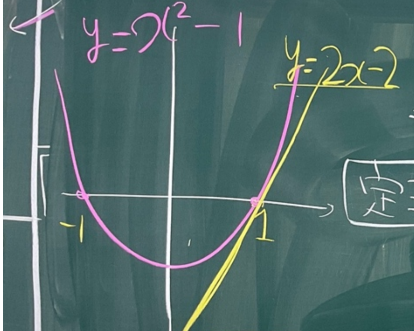
$f(x)=x^n$ なら $f'(x)=nx^{n-1}$（あとで）

補足 みんなが使う関数は

だいたい微分可能

（微分可能 ⇒ 連続）

微分の図形的意味＝接線のかたむき



$f(x)=x^2-1$ 　($f'(x)=2x$)

$\Rightarrow f'(1)=2$

定理

$y=f(x)$の点$(a,f(a))$での接線の方程式

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1)+f(1) \\ &= 2(x-2) \end{aligned}}$$

命題 f, g 微分可能関数

① $(f+g)' = f'+g'$

② $(cf)' = cf'$ （c 実数）

③ $(f\cdot g)' = f'g+fg'$

④ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$

例 $h(x) = \underbrace{(x^2+3)}_{f}\underbrace{(x^2+1)}_{g}$

$f' = (x^2+3)' = 2x$

$g' = (x^2+1)' = 2x$

$h'(x) = f'g+fg' = 2x(x^2+1)+(x^2+3)\cdot 2x = 4x(x^2+2)$

例 $h(x) = \frac{1}{x^2+1} = \frac{f}{g}$ $f=1$ $g=x^2+1$

$f'=0$ $g'=2x$

$$h'(x) \underset{④}{=} \frac{f'g-fg'}{g^2}$$

$$= \frac{0\cdot(x^2+1)-1\cdot 2x}{(x^2+1)} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

補足 $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$

証 ①② 省略

$$(fg)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x-a}\right] g(x) + \lim_{x \to a} f(a) \left[\frac{g(x) - g(a)}{x-a}\right]$$

$$= f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$$

$$\therefore\ (fg)' = f'g + fg'$$

④ $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-1}{g^2}$ を先に示す

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \times \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right] = \lim_{x \to a} \frac{-1}{x-a} \times \left(\frac{g(x) - g(a)}{g(x)\,g(a)}\right)$$

$$= -1\,\frac{g'(a)}{g(a)^2}$$

よって $\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \times \frac{1}{g}\right)'$

$$\overset{③}{=} f'\,\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)'$$

$$\overset{④}{=} \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

2.2 初等関数の微分

命題 $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$

証 $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ をつかうと

$\left(\begin{array}{l} h = x-a \\ x \to a \Leftrightarrow h \to 0 \end{array} \right)$

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

加法定理

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \lim_{h \to 0} \cos x \frac{\sin h}{h}$$

ここで
$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)}$$
$$= \frac{(\cos h)^2 - 1}{h(\cos h + 1)}$$
$$= \frac{-(\sin h)^2}{h(\cos h + 1)}$$
となる

$$(☆) = \lim_{h \to 0} \sin x \frac{-(\sin h)(\sin h)}{h(\cos h + 1)} + \lim_{h \to 0} \cos x \frac{\sin h}{h}$$

ここで $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ より

$$\lim_{h \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{-\sin h}{h}}}_{-1} \; \frac{\overset{0}{\boxed{\sin h}}}{\underbrace{\boxed{(\cos h + 1)}}_{2}} = -1 \times \frac{0}{2} = 0$$

よって $(☆) = \sin x \times 0 + \cos x \times 1 = \cos x$

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \; //$$

$(\sin x)' = \cos x$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$f = \sin x \quad g = \cos x$

$f' = \cos x \quad g' = -\sin x$

$$= \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$\left(\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}\right)$$

$$= \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$$