1.3 関数と極限

$\boxed{\text{定義}}$ $A \subset \mathbb{R}$ 部分集合

任意の(どんな) $x \in A$, 実数 $f(x)$ が唯1つ定まるとき $f(x)$ をA上の関数という

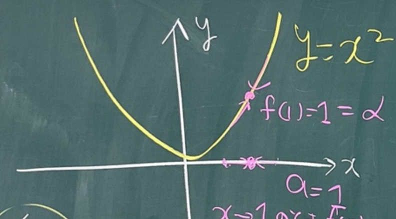
$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

とかく

また $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$ を $y = f(x)$ のグラフという

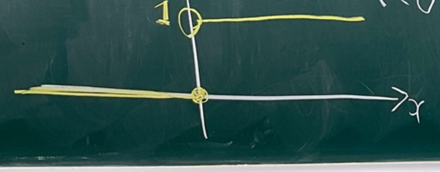
例 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^2$$



例 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$



$\boxed{\text{定義}}$ $a \in \mathbb{R}$ $f(x)$ を a のまわりで定義された関数

$x \to a$ のとき $f(x)$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束する

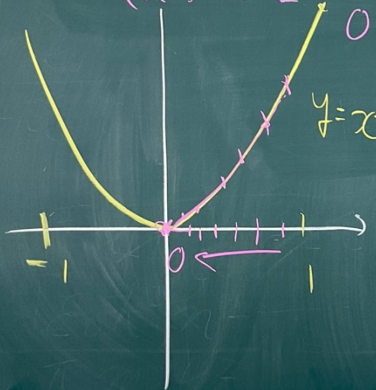
$x \neq a$ を満たしながら $f(x)$ が α に限りなく近づくこと

このとき $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ とか $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \alpha$ とかく

同様に $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ とか $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \alpha$ も定める

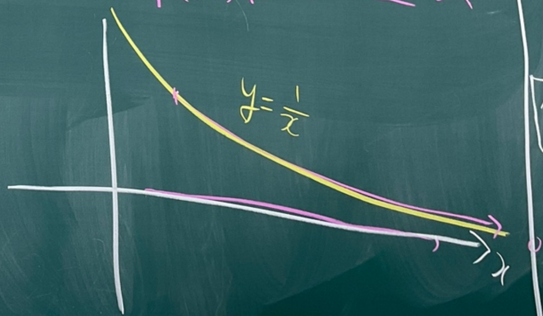
例 $f:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$
$x\longmapsto x^2$

$\lim_{x\to 0} f(x)=0$
(xが0に近づくと$f(x)$も0に近づく)



例 $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$
$x\longmapsto \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$
xが限りなく大きくなると
$f(x)$は0に近づく



定理 $\lim_{x\to a}|f(x)-\alpha|=0 \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=\alpha$

α：実数

定理（はさみうちの原理）

$f(x)\leqq g(x)\leqq h(x)$ かつ $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$ なら
$\lim_{x\to a} g(x)=\alpha$

命題 1. $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\boxed{\lim_{x\to a} f(x)}+\boxed{\lim_{x\to a} g(x)}$

(ただし極限値が実数のとき（$\pm\infty$とかではないとき）)

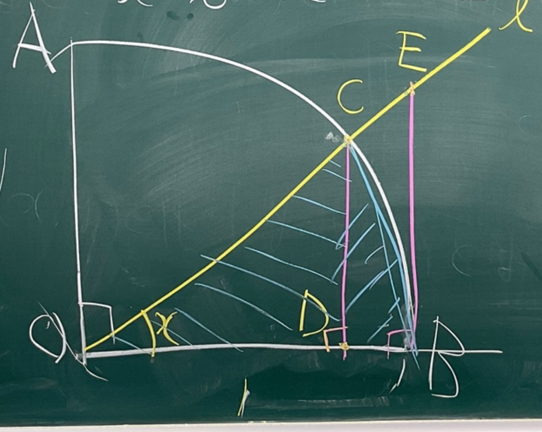
2. $\lim_{x\to a}(cf(x))=c\lim_{x\to a} f(x)$

3. $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = (\lim_{x\to a} f(x))(\lim_{x\to a} g(x))$

4. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ (ただし $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$)

命題 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

証



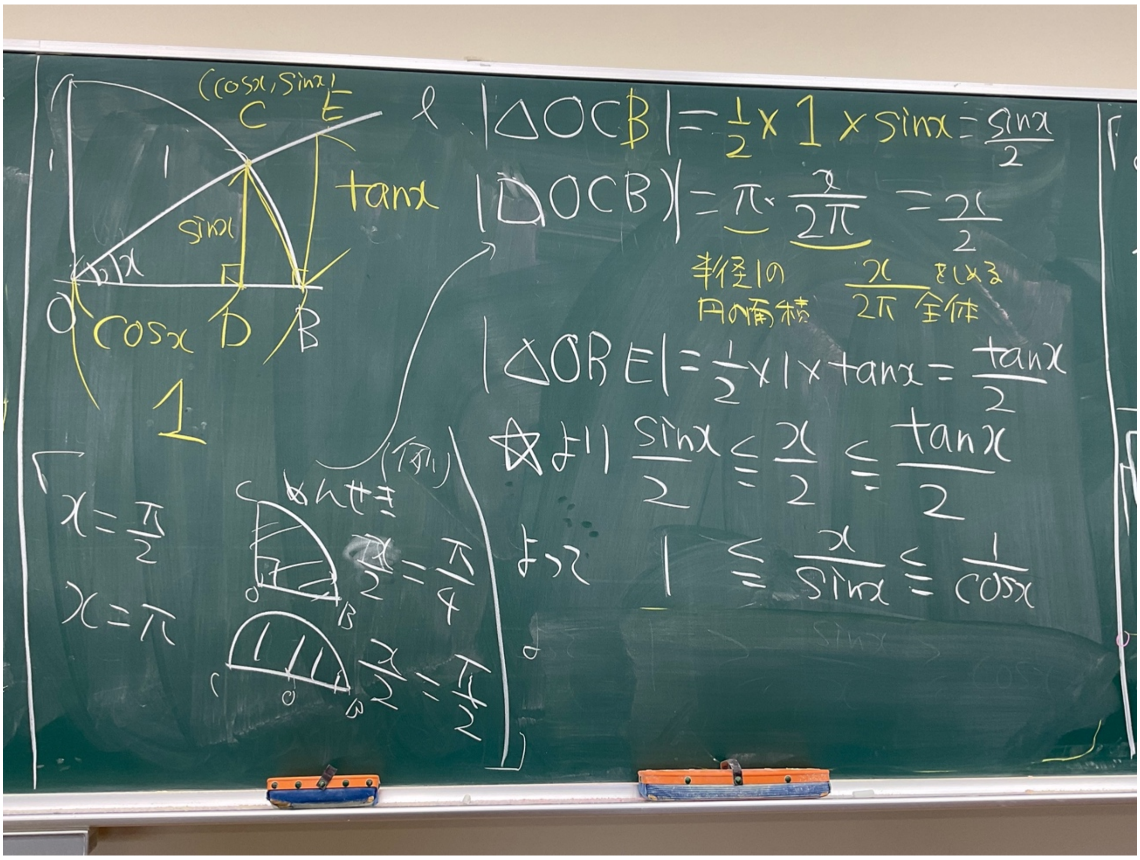
・◺ OABを半径1のおうぎ形

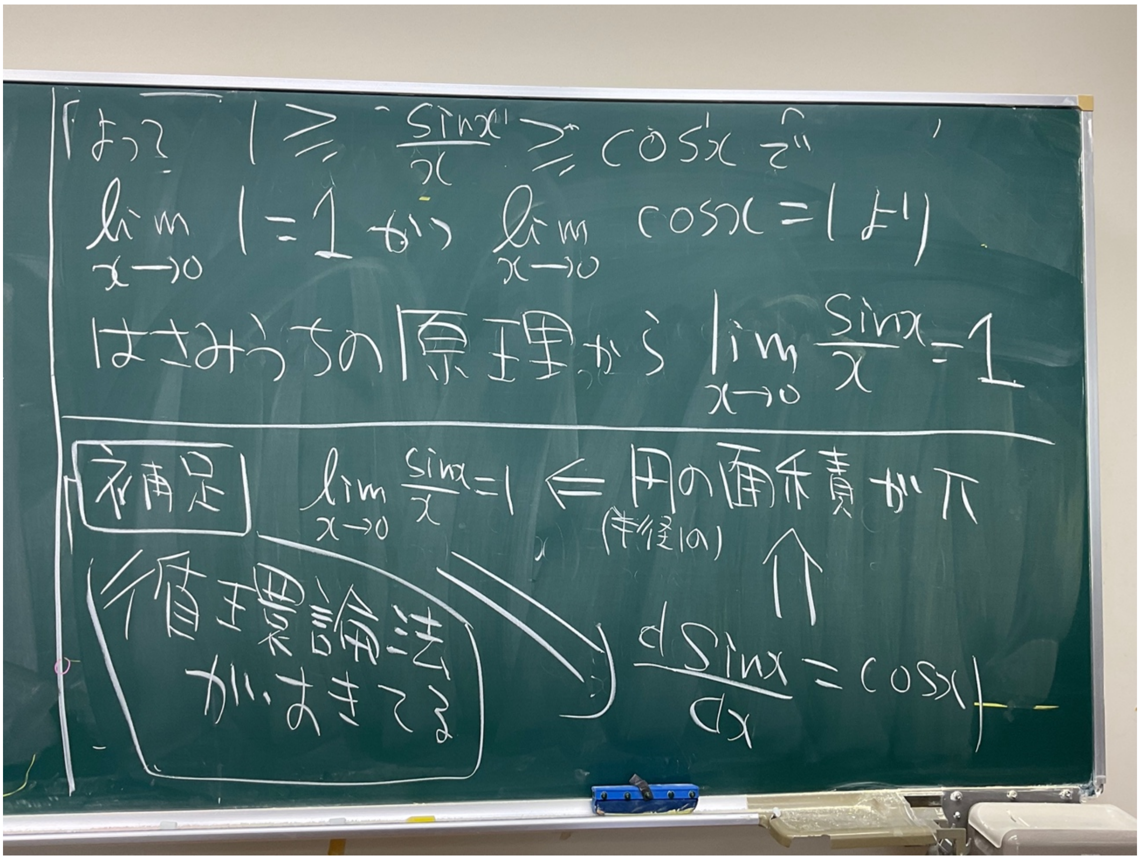
・l 傾きxの半直線、C 左のようにとる

(~~D: CからOBへの垂点~~)

・E: l上の点でBEとOBが垂直となる点

図から △OCBの面積 ≦ ◺OBCの面積 ≦ △OBEの面積 ☆


(cosx, sinx)
C E ℓ
1
sinx
tanx
O cosx D B
1
$|\triangle OCB| = \frac{1}{2} \times 1 \times \sin x = \frac{\sin x}{2}$
$|扇OCB| = \pi \cdot \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$
半径1の円の面積
$\frac{x}{2\pi}$ をしめる全体
$|\triangle OBE| = \frac{1}{2} \times 1 \times \tan x = \frac{\tan x}{2}$
☆より $\frac{\sin x}{2} \leqq \frac{x}{2} \leqq \frac{\tan x}{2}$
よって $1 \leqq \frac{x}{\sin x} \leqq \frac{1}{\cos x}$
$x = \frac{\pi}{2}$
$x = \pi$
(例)
めんせき
$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}$
$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$


よって $1 \geqq \frac{\sin x}{x} \geqq \cos x$ で
$\lim_{x \to 0} 1 = 1$ かつ $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ より
はさみうちの原理から $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
補足
$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Leftarrow$ 円の面積がπ
(半径1の)
$\Uparrow$
$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$
循環論法がおきてる

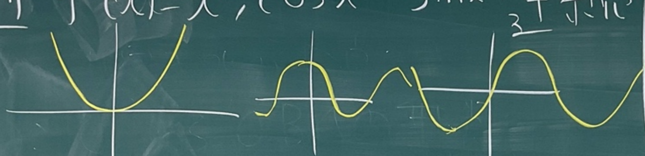
1.4 関数の連続性

$\boxed{\text{定義}}$ $a\in\mathbb{R}$, $f(x)$ を a のまわりで定義された関数

$f(x)$ が $x=a$ で連続とは $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ となること

f: 区間 $I\,(=[a,b])$ 上の関数が連続関数とは任意の点 $c\in I$ で $f(x)$ が $x=c$ で連続となること

例 $f(x)=x^2$, $\cos x$ $\sin x$ 連続

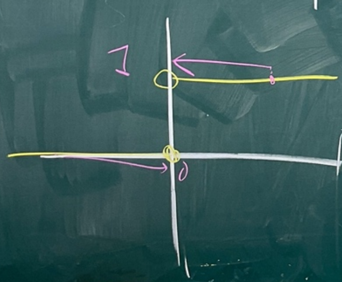


連続
‖
グラフがつながってる

例 $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x\leqq 0\end{cases}$ 連続ではない

($\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ が収束しないから)

$f(0)=0$



命題 $\boxed{1}$ f, g が $x=a$ で連続なら

$f\pm g$, cf, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(g(a)\neq 0)$ も $x=a$ で連続

$\boxed{2}$ $f(x)$ が $x=a$ で連続

$g(y)$ が $y=f(a)$ で連続 なら

$g(f(x))$ も $x=a$ で連続

つまり連続関数のたしざん、ひきざん、かけざん わりざん、合成 も連続

証明 $\boxed{1}$ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$ より

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) \underset{(前命題)}{=} \lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x) = (f(a)+g(a))$$ より

$\boxed{2}$ $y=f(x)$ とおくと「$g(y)$ が $f(a)$ に収束」

$$\overset{定}{\Longleftrightarrow} \lim_{y\to f(a)} g(y) = g(f(a))$$ (同値)

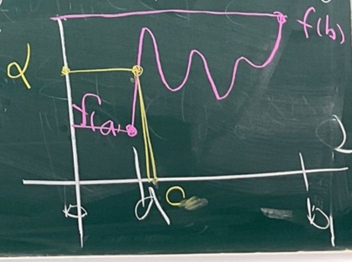
よって $y=f(x)$ とおくと $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ より

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{\boxed{y\to f(a)}} g(y) = g(f(a))$$

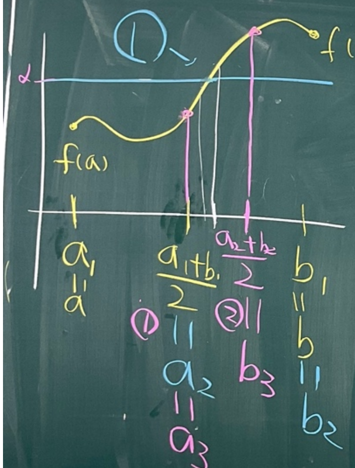
定理 $f(x)$が$[a,b]$上連続なら
最大値 最小値をもつ

定理（中間値の定理）

$f(x)$ $[a,b]$上の連続関数
$f(a)<f(b)$なら、$f(a)<\alpha<f(b)$なる
αについて、ある$c\in[a,b]$で$\alpha=f(c)$となる



証 **二分探索** $a_1=a$, $b_1=b$ とおく.



① $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)<\alpha$ なら $\begin{cases} a_2=\frac{a_1+b_1}{2} \\ b_2=b_1 \end{cases}$
中点

② $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)>\alpha$ なら $\begin{cases} a_2=a_1 \\ b_2=\frac{a_1+b_1}{2} \end{cases}$

③ $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=\alpha$ なら $c=\frac{a_1+b_1}{2}$ として
証明を終わりにする

これをくり返して $a_1, a_2, a_3\cdots$
$b_1, b_2, b_3\cdots$ をとる

すると $\boxed{1}$ $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots\cdots \leqq b_3 \leqq b_2 \leqq b_1$

$\boxed{2}$ $b_n - a_n = \dfrac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}$

$$\left(b_2 - a_2 = b_1 - \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{b_1-a_1}{2} \right)$$

(ネイピア数の証明) $\boxed{3}$ $f(a_n) \leqq \alpha \leqq f(b_n)$

すると $\boxed{1}$より $\{a_n\}$ は "$a_n \leqq a_{n+1}$" かつ "$a_n \leqq b_1$"

ので収束する。これを A とおく $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A\right)$

同様に $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ となる

$\boxed{2}$ より $|b_n - a_n| = \dfrac{|b_{n-1}-a_{n-1}|}{2} = \dfrac{|b_1-a_1|}{2^{n-1}}$

よって $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$ よって $A = B$

$c = A = B$ とおく

③より $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \boxed{=} f(c) \leqq \alpha$

fが連続

③より $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \boxed{=} f(c) \geqq \alpha$

よって $\alpha = f(c)$

$\boxed{\text{おまけ}}$

$f(x)$が $x=a$で連続

$\underset{\text{同じ}}{\iff}$ $\lim_{x \to a} f(x) = f\left(\lim_{x \to a} x\right) = f(a)$

$f(x)$が$x=a$で連続かつ $g(y)$が $y=f(a)$で連続なら

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) = g\left(f\left(\lim_{x \to a} x\right)\right) = g(f(a))$$

$\therefore$ $g(f(x))$ は $x=a$で連続