1 数列と極限

1.1 記法

$\mathbb{N} = \{$自然数全体$\} = \{1, 2, 3, \dots\}$ Natural number

$\mathbb{Z} = \{$整数全体$\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ Zahlen

$\mathbb{Q} = \{$有理数全体$\} = \left\{ \frac{n}{m} \,\middle|\, \begin{matrix} m \neq 0 \\ m, n \in \mathbb{Z} \end{matrix} \right\}$ Quotient

$\mathbb{R} = \{$実数全体$\}$

$= (-\infty, +\infty)$ Real number

a

数直線上

a その

区間の表記

a, b 実数 $(-\infty \quad +\infty)$

$[a, b] = \{a \leqq x \leqq b\}$

a b

$[a, b) = \{a \leqq x < b\}$

a b

$(a, b] = \{a < x \leqq b\}$

a b

$(a, b) = \{a < x < b\}$

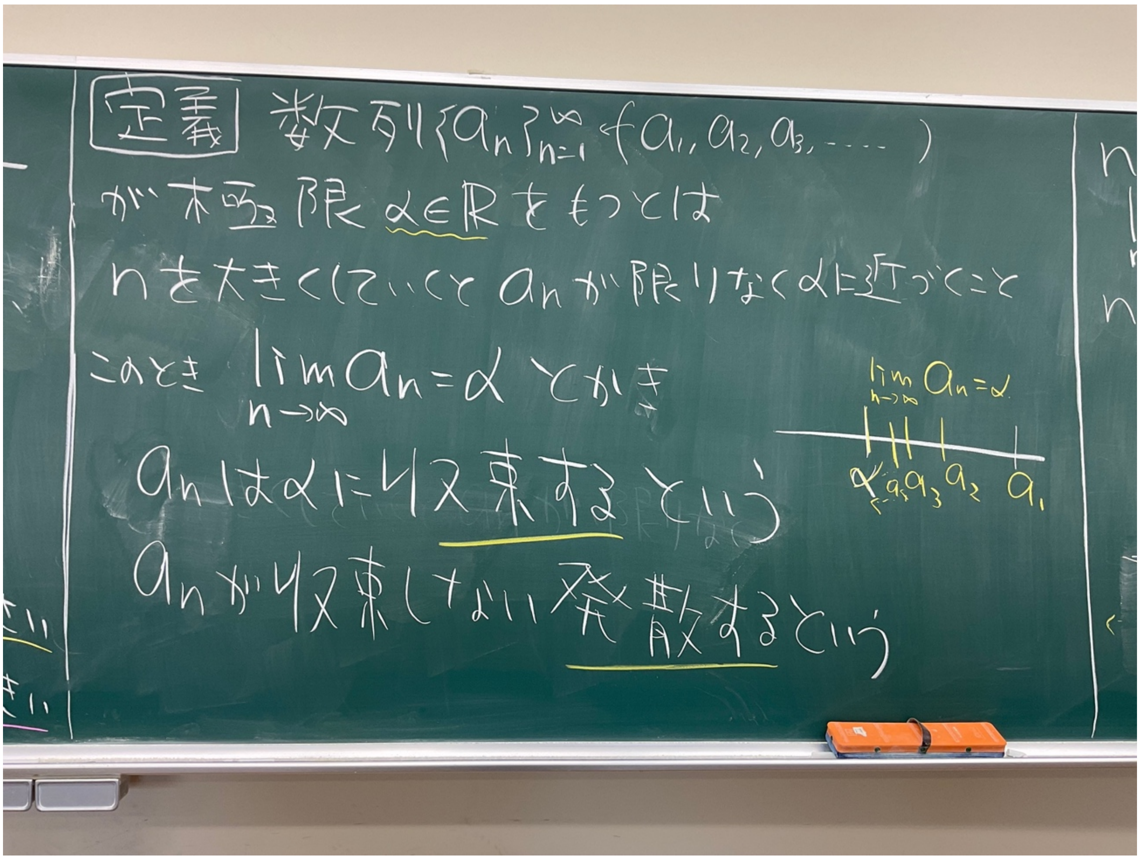
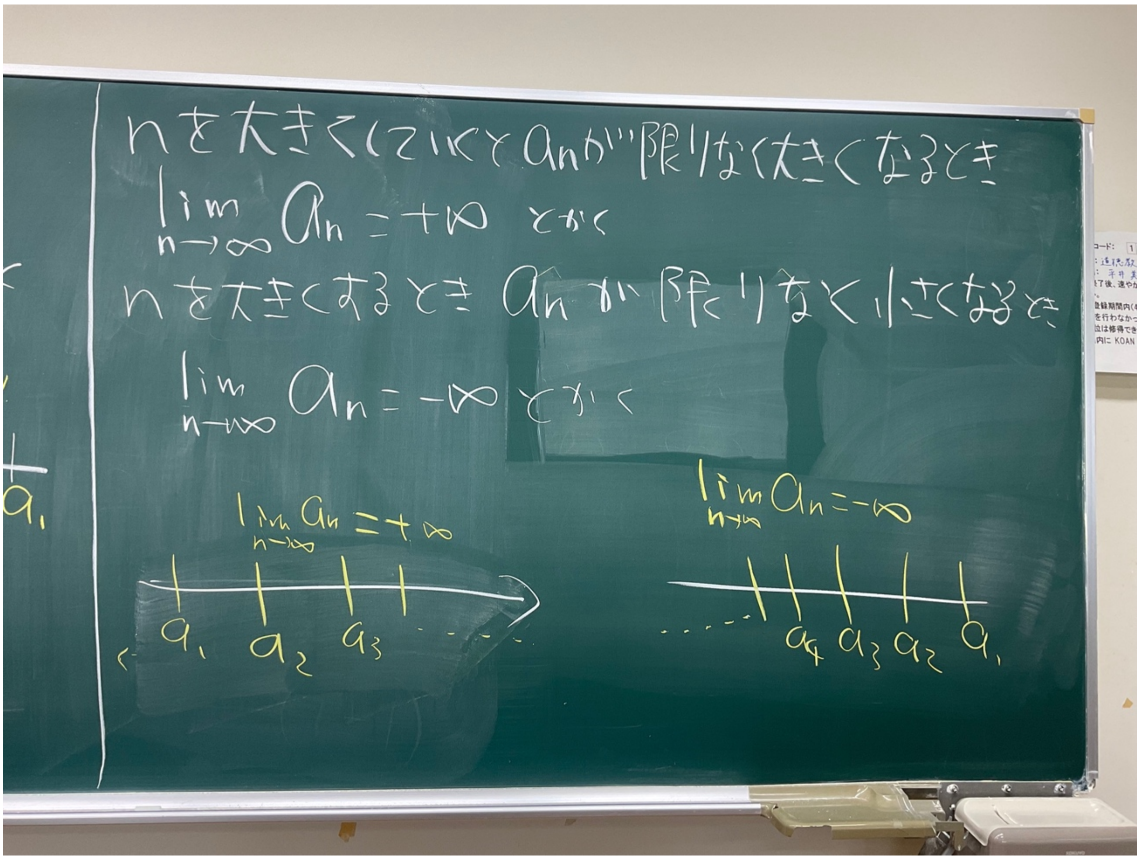
a b

$[a, b]$ 閉区間

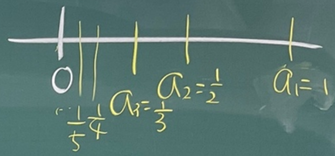
(a, b) 開区間

$-\infty$ 実数ではないが限りなく小さい

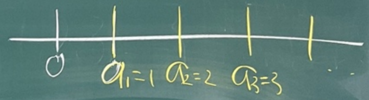
$+\infty$ 大きい


定義 数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$
が極限 $\alpha \in \mathbb{R}$ をもつとは
nを大きくしていくと a_n が限りなくαに近づくこと
このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とかき
a_nはαに収束するという
a_nが収束しない 発散するという
$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$
α a_3 a_2 a_1

nを大きくしていくとa_nが限りなく大きくなるとき
$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ とかく
nを大きくするとき a_n が限りなく小さくなるとき
$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ とかく
$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
a_1 a_2 a_3
$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$
a_4 a_3 a_2 a_1

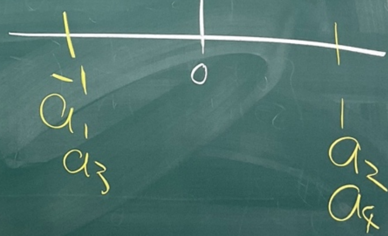
例1 $a_n=\frac{1}{n}$　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$
0に収束



例2 $a_n=n$　$\lim_{n\to\infty} n=+\infty$
発散



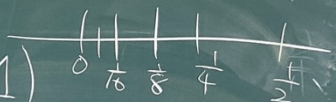
例3 $a_n=(-1)^n$　発散



例4 A 実数, $a_n=A^n$

・$A<1$（正の）のとき A^n は0に収束　($A=\frac{1}{2}$

n	1	2	3	4	…
A^n	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	…



・$A=1$ のとき A^n は1に収束 ($A^n=1$)

・$A>1$ のとき $+\infty$ に発散 ($A=2$

n	1	2	3	4	…
A^n	2	4	8	16	…

定理 数列$\{a_n\}$と実数αについて

$\lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha|=0$ ならば $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$

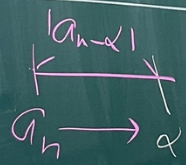
$\boxed{\text{定理}}$ はさみうちの原理

$\alpha \in \mathbb{R}$, $a_n \leqq b_n \leqq c_n$ となる数列 a_n, b_n, c_n について

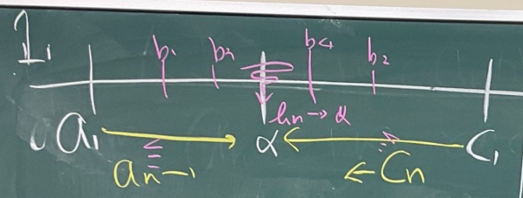
① $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$ ならば $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$

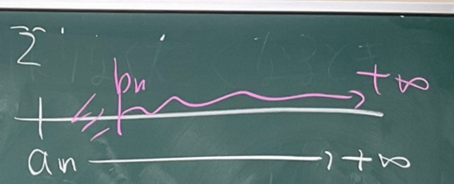
② $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ならば $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$

③ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$ ならば $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$



きょりがちぢまれば
収束





$\boxed{\text{命題}}$ $\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする

1 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha + \beta$ (α, β が $+\infty, -\infty$ のときはダメ)

2. $\lim\limits_{n\to\infty} c a_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c\alpha$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ $(\beta \neq 0)$

証 1

$0 \le |(a_n+b_n)-(\alpha+\beta)|$

$\le |a_n-\alpha| + |b_n-\beta|$

$\left(|x+y| \le |x|+|y| \right.$

$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta \right.$

$\lim_{n\to\infty}$ する

$0 \qquad 0$

はさみうち $\lim_{n\to\infty} |(a_n+b_n)-(\alpha+\beta)| = 0$

$\Rightarrow$ 定理より

$\lim_{n\to\infty} a_n+b_n = \alpha+\beta$

$0 \le |a_nb_n - \alpha\beta| \le |a_nb_n - \alpha b_n + \alpha b_n - \alpha\beta|$

$0 \qquad 0$ はさみうち 0

$\le |b_n||a_n-\alpha| + |\alpha||b_n-\beta|$

$\lim_{n\to\infty}$ する

0

例1 $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ $\quad a_1 = \frac{1}{1\times2}$

$a_2 = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

$a_n = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

証 $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-(k)}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$$a_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1$$

例1 a 正の実数 $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$

$$a^n = \underbrace{a\times\cdots\times a}_{n\text{回かける}} \qquad n! = n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$$

証 $n > a+1$ なる n について

$$0 \le \frac{a^n}{n!} = \underbrace{\boxed{\frac{a}{n}\times\frac{a}{n-1}\times\cdots\times\frac{a}{a+1}}}_{n-a\text{コ}} \times \underbrace{\boxed{\frac{a}{a}\times\frac{a}{a-1}\times\cdots\times\frac{a}{1}}}_{a\text{コ}}$$

かんたんのため aを正整数とおく

$$\le \frac{a}{a+1}\times\frac{a}{a+1}\times\cdots\times\frac{a}{a+1}\times\frac{a^a}{a!}$$

$\frac{a}{n} \le \frac{a}{a+1}$ ($n > a+1$)

$$= \left(\frac{a}{a+1}\right)^{n-a}\times\frac{a^a}{a!}$$

$\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ $\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{n-a}\times\boxed{\frac{a^a}{a!}} = \frac{a^a}{a!}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{a+1}\right)^n = 0$

はさみうちより $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$

定理 ネイピア数、自然対数

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 収束する。その数をeとかき

ネイピア数という $\left(e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \fallingdotseq 2.718\ldots\ldots\right)$

証 次の事実を使う。

定理 ・$a_n \leqq a_{n+1}$ となり

・ある$M>0$, $a_n \leqq M$ となる数列は収束する

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \cdots \to M$

よって $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とおいて、$\underline{a_n \leqq a_{n+1}}$ ① と $\underline{a_n \leqq 3}$ ② を示せばよい

① $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, 1^{n-k}\left(\frac{1}{n}\right)^k$

$=1+n\times\frac{1}{n}+\frac{n\times(n-1)}{2\times1}\times\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{3\times2\times1}\times\left(\frac{1}{n}\right)^3$

$+\cdots+\frac{n!}{n!}\times\left(\frac{1}{n}\right)^n$

$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$

$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$ …

3②
せばよ

$$\leqq 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+\boxed{\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=a_{n+1}$$

② $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$

$$\leqq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$(2^{n-1}\leqq n!)\ \leqq 1+\boxed{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$=1+\boxed{\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}}=1+2-\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$< 3$$