7/4, 7/11 休講, 7/18 演習

7/25 期末試験

前回

ヘッシャン $D_P = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$

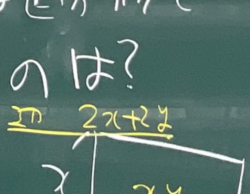
を使った極値判定法

今回 別の極値判定法

制約条件 $g(x,y)=0$ の下で $f(x,y)$ の極大極小を求める

例 辺の長さの和が1となる長方形で面積を最大にするものは?

縦をx, 横をyとすると



$g(x,y)=2x+2y-1=0$ の下での

$f(x,y)=xy$ の極大値を求めることと同じ

定理（ラグランジュ未定乗数法）

$f(x,y)$, $g(x,y)$ C^1級関数.

$g(x,y)=0$ の下で $f(x,y)$ が (a,b) で極値をもち、$\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b)\neq 0$ または $\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b)\neq 0$ とする

このときある定数 λ があって

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\lambda\frac{\partial g}{\partial x}(a,b) \text{ かつ } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)$$

となる

要するに $g(x,y)=0$ での $f(x,y)$ の極値は

① $g(a,b)=\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b)=0$ か.

② $F(x,y,t)=f(x,y)-tg(x,y)$ として.

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,\lambda)}=\boxed{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,\lambda)}=\frac{\partial F}{\partial t}(a,b,\lambda)=0$$

なる点 (a,b) のどちらか

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}-\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0}, \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}-\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0}, \quad \boxed{g=0}$$

使い方　$g(a,b)=0$ の下での $f(a,b)$ の極値

手順1　$g(a,b)=\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b)=0$ なる (a,b) を求める

手順2　$F(x,y,t)=f-tg$ として

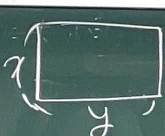
$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,\lambda)=\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,\lambda)=\frac{\partial F}{\partial t}(a,b,\lambda)=0$$

なる (a,b,λ) を求める

手順3　(a,b) が極大・極小かをしらべる

$\boxed{\text{ある条件下で}}$ $\boxed{f(x,y)\text{は}}$ 代入して大きいものは最大値になる
代入して小さいものは最小値になる

例　辺の長さの和が1とする



$g(x,y)=2x+2y-1$ の下での $f(x,y)=xy$ の最大をもとめる

手順1　$\dfrac{\partial g}{\partial x}=2$ より $\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b)=0$ なる点はない。

手順2　$F(x,y,t)=f-tg=xy-t(2x+2y-1)$ として

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=y-2t\\[4pt] \dfrac{\partial F}{\partial y}=x-2t\\[4pt] \dfrac{\partial F}{\partial t}=-2x-2y+1\end{cases}$$

より

$$\begin{cases}b-2\lambda=0\\ a-2\lambda=0\\ -2a-2b+1=0\end{cases}$$

なる (a,b,λ) をもとめる

$\Rightarrow\ a=b=2\lambda,\ 1=2a+2b=4\lambda+4\lambda=8\lambda$

$\Rightarrow\ \lambda=\frac{1}{8},\ a=b=\frac{1}{4}$

よって $f(\frac{1}{4},\frac{1}{4})=\frac{1}{16}$ が最大になる.

(長さ $\frac{1}{4}$ の正方形)　$g(\frac{1}{4},\frac{1}{4})=2\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}-1=0$

補足 $g(x,y)=0$ の下で $f(x,y)$ の最大最小の存在は保証されている

(最大最小の存在定理)

例 $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ の下での $f(x,y)=xy$ の最大最小を求める.

手順1 $\frac{\partial g}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial g}{\partial y}=2y$ より

$(a^2+b^2-1)=2a=2b=0$ なる (a,b) を求める

$\longrightarrow$ このような点はない.

手順2 $F(x,y,t)=f-tg$

$= xy-t(x^2+y^2-1)$ とおく

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y - 2xt \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x - 2yt \\ \dfrac{\partial F}{\partial t} = -(x^2+y^2-1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b - 2a\lambda = 0 \\ a - 2b\lambda = 0 \\ a^2+b^2-1 = 0 \end{cases}$$

なる (a, b, λ) を求める

$$\Longrightarrow \begin{cases} b = 2a\lambda = 2(2b\lambda)\lambda = 4b\lambda^2 \\ a = 4a\lambda^2 \end{cases}$$

a, b ともに0ではないので $\lambda \neq 0$

$b \neq 0$ より $4\lambda^2 = 1$　$\lambda = \pm\dfrac{1}{2}$

よって $b = 2a\lambda = \pm a$

$a^2+b^2=1$ より　$2a^2=1$　$a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$(a, b) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$　最大

$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{2}$　最小

$f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{2}$　最小

$f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$　最大

前回の $Df(a,b)>0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)>0$ なら (a,b) 極小の証明.

定理（2変数のテイラー展開）

点 (a,b) (x,y) に対して ある2点の線分上の点 (a',b') があって

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a',b')(x-a)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a',b')(x-a)(y-b)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a',b')(y-b)^2\right]$$

$\boxed{\text{証}}$ $(a,b)=(0,0)$ としてよい. (x,y) を固定する.

$u(t)=xt$ $v(t)=yt$ として.

$F(t)=f(u(t),v(t))$ とする.

一変数テイラー展開から ある $\theta\in(0,1)$ で

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{F''(0)}{2}$$ となる

$$F'(0)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dv}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y$$

連鎖律

$$\frac{F''}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x} x\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y} y\right) \right]$$

tの関数

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} yx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y^2 \right]$$

（連鎖律を2回つかう）

今、$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ かつ $Df(a,b) > 0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$

なる (a,b) に 2変数テイラー展開をつかうと

$$f(x,y) = f(a,b) + 0$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\underbrace{\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a',b')}}_{A\text{とおく}}(x-a)^2 + 2\underbrace{\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a',b')}}_{B\text{とおく}}(x-a)(y-b) + \underbrace{\boxed{\frac{\partial^2 f(a',b')}{\partial y^2}}}_{C\text{とおく}}(y-b)^2 \right]$$

$$\Rightarrow f(x,y) - f(a,b) = \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}\left[A(x-a)^2 + 2B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2 \right]}}_{=☆} > 0$$

よって(☆)が0より大きいことを示せばよい

今仮定から $Df>0 \Rightarrow AC-B^2>0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0 \Rightarrow A>0$

$X=(x-a)$, $Y=(y-b)$ とおくと

$$(☆)=\frac{1}{2}\left(AX^2+2BXY+CY^2\right)$$

$$=\frac{1}{2A}\left[A\left(X+\frac{B}{A}Y\right)^2+\frac{1}{A}\left(AC-B^2\right)Y^2\right]$$

これは0より大きい //