2024/6/6

① $0 \leqq \dfrac{n}{n^2+1} \leqq \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ より

はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0$ //

② $S_n = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5^2} + \cdots + \dfrac{1}{5^n}$ とおくと

$\dfrac{1}{5}S_n = \dfrac{1}{5^2} + \cdots + \dfrac{1}{5^n} + \dfrac{1}{5^{n+1}}$ より

$\dfrac{4}{5}S_n = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{5^{n+1}}$

$\therefore S_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{5^n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5^n} = 0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{5^k} = \lim_{n\to\infty}S_n = \frac{1}{4}$ //

③ $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{-n}$ であり

$\dfrac{n}{n-1} = \dfrac{n-1+1}{n-1} = 1 + \dfrac{1}{n-1}$ より

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n-1}\right)}$$

ここで $\displaystyle\lim_{n-1\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n-1}\right) = 1$ より

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \times \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{e} \qquad //$$

$\boxed{2}$ (1) $\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)' = \dfrac{x^2+1-x(2x)}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ //

(2) $f(x)=x^2+1$, $g(y)=\sqrt{y}=y^{\frac{1}{2}}$ とおくて

$f'(x)=2x$, $g'(y)=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ より

合成関数の微分法より

$g(f(x))' = g'(f(x)) \times f'(x)$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \times 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(3) $f(x)=2x^2+3x$ $g(y)=\log y$ とおくて

$f'(x)=4x+3$ $g'(y)=\frac{1}{y}$ より

合成関数の微分法より

$g(f(x))' = g'(f(x)) \times f'(x)$

$= \dfrac{1}{2x^2+3x} \times (4x+3) = \dfrac{4x+3}{2x^2+3x}$ //

$\boxed{3}$ 手順通りやる

① $f'(x)=0$ の解をもとめる

$$f'(x)=3x^2-12x+9$$
$$=3(x^2-4x+3)$$
$$=3(x-3)(x-1)$$ より $x=1,3$

② 増減表をかく

x		1		3	
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$		5		1	

③

$(-\infty,1)$ 上で $f'(x)>0$ ($f'(0)=9>0$ より)

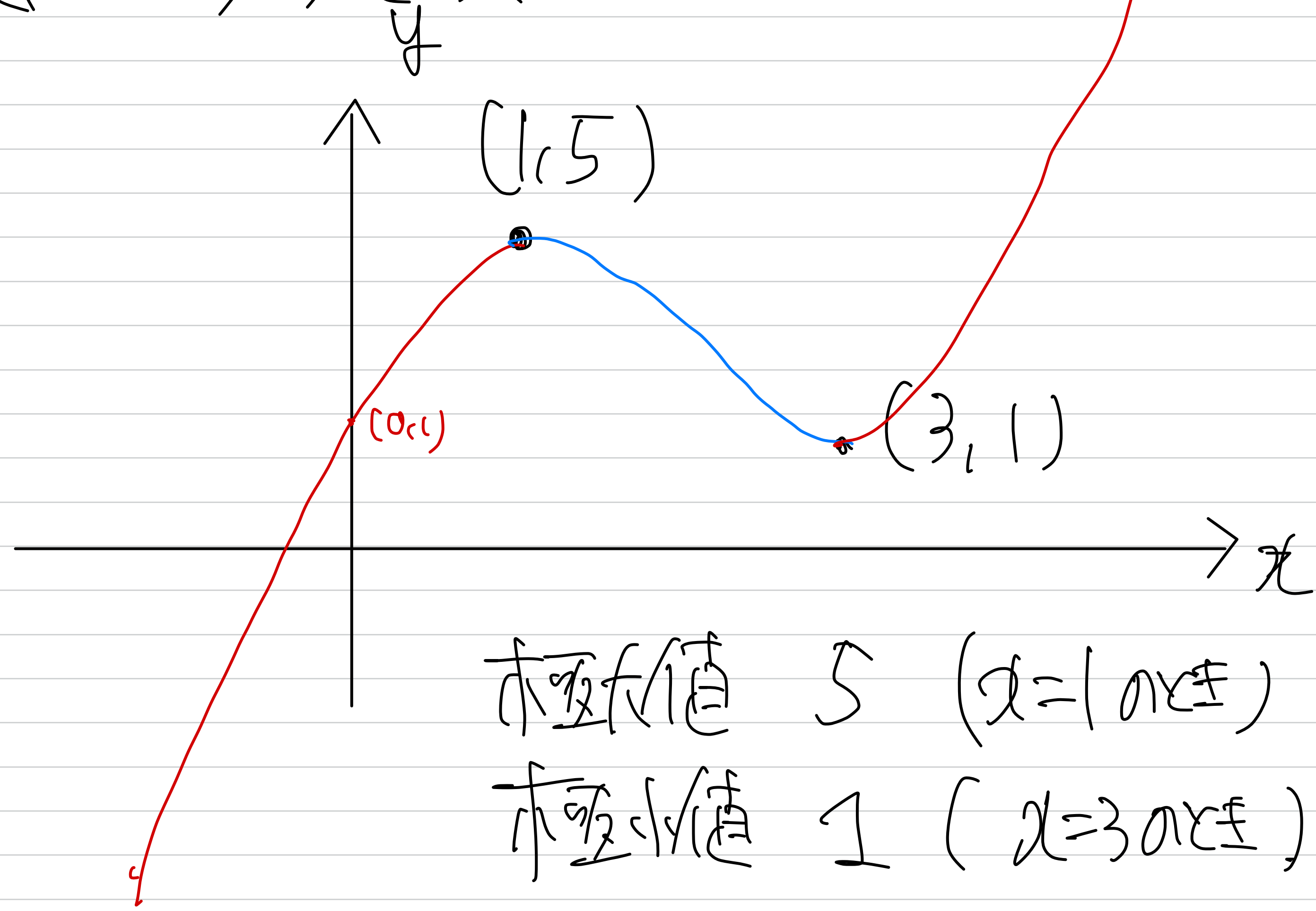
$(1,3)$ 上で $f'(x)<0$ ($f'(2)=-3<0$ より)

$(3,+\infty)$ 上で $f'(x)>0$ ($f'(4)=9>0$ より)

から、増減表は次のようになる

x		1		3	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	1	↗

④グラフをかく。



極大値 5 ($x=1$のとき)

極小値 1 ($x=3$のとき)

② $g(x)=e^{-x^2}$ とする

(1) $g'(x)=0$ の解をもとめる

$g'(x) = -x e^{-x^2}$ で $e^{-x^2}>0$ より

$g'(x)=0$ の解は $x=0$ のみ。

(2) 増減表をかく

x		0	
$g'(x)$		0	
$g(x)$		1	

(3)

$(-\infty, 0)$ 上で $g'(x)>0$ $(g'(-1)=e^{-1}>0$ より$)$

$(0, \infty)$ 上で $g'(x)<0$ $(g'(1)=-e^{-1}<0$ より$)$

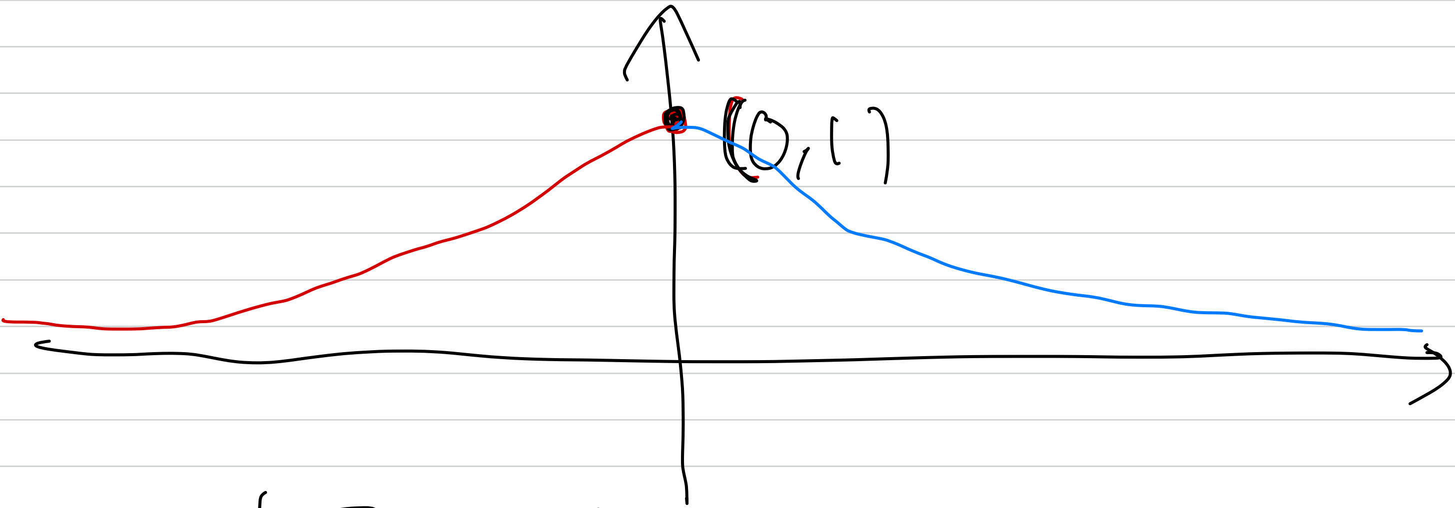
よって増減表は以下のとおりになる

x		0	
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

④グラフを完成させる.

ここで $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ より



という形になる.

最大値は 1 ($x=0$の時)

$\boxed{\text{Remark}}$

$y = e^{-x^2}$ は正規分布とよばれ

偏差値などをだすさいに使われる

(みなさんの成績の分布もだいたい正規分布にしたがう)

$\boxed{4}$ (1) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

$f^{(2)}(x) = \left(\dfrac{1}{1+x}\right)' = \left((1+x)^{-1}\right)'$

$= -(1+x)^{-2}$

$f^{(3)}(x) = \left(-(1+x)^{-2}\right)'$

$= 2(1+x)^{-3}$

(2) $f^{(4)}(x) = \left(2(1+x)^{-3}\right)'$

$= -6(1+x)^{-4}$ より

$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,(1+x)^{-k}$

であると推測できる

■ $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,(1+x)^{-k}$ の証明

$k=1$ のとき $f^{(1)}(x) = (1+x)^{-1}$ より ok

$k=n$ のとき成り立つとして $k=n+1$ のとき成り立つことを証明する

$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'$

$$= \left((-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}\right)'$$

帰納法の仮定

$$= (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\,(-n)\,(1+x)^{-n-1}$$

$$= (-1)^{n}\cdot n!\,(1+x)^{-(n+1)}$$

よって $k=n+1$ のときも成り立つ。

以上より $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,(1+x)^{-k}$

③ $n \geqq 1$ のとき

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+0)^{-n}}{n!}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ であり}$$

$n=0$ のとき

$$\frac{f^{(0)}(0)}{0!} = \log(1+0) = 0 \text{ より}$$

$$\log(1+x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad //$$

$$\left(= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots\cdots \right)$$

$\boxed{5}$ $x\in(0,\infty)$ で $f_n'(x)<0$ をいえばよい。

① $f_n'(x) = -\frac{n}{2}e^{nx} - \frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}$

$-e^{nx} \leqq -e^{0} = -1$

$-\cos\frac{x}{3} \leqq -(-1) = 1$ より

$f_n'(x) \leqq -\frac{n}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2-3n}{6} < 0$

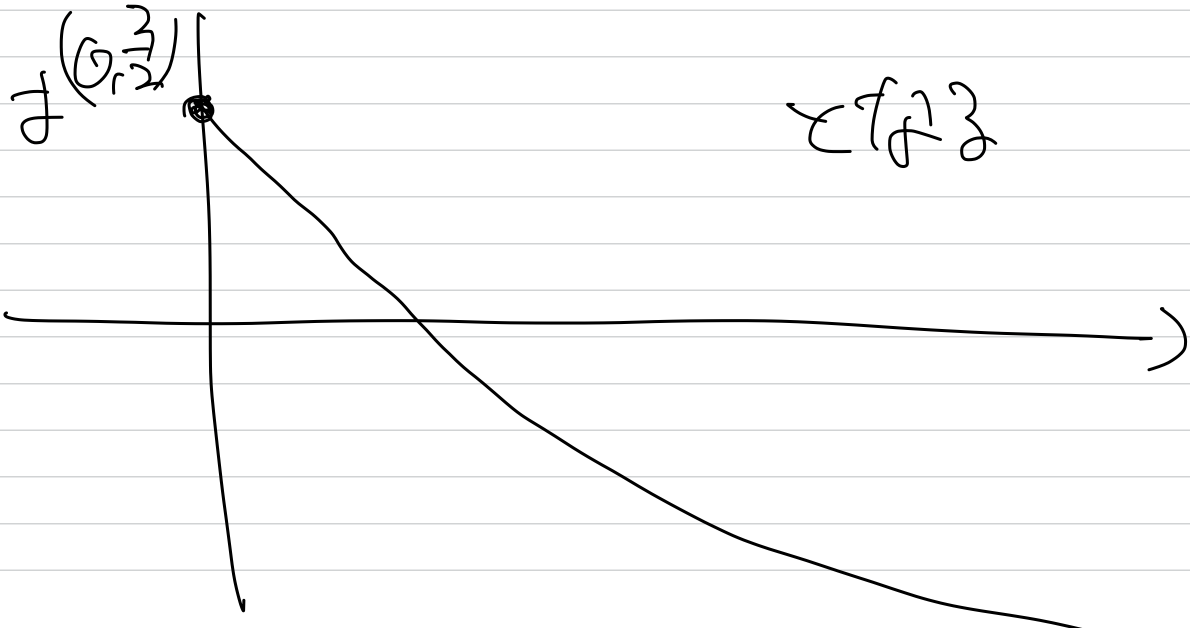
② $f_n(0) = 1 - \frac{1}{2}e^{0} + \cos 0$

$= 1 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ かつ

$\lim_{x\to\infty} e^{x} = \infty$ より

$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = -\infty$ となるので

グラフは



となる

よって、ただ1つの実数解をもつ

③ $e^{na_n} = 2\left(1+\cos\frac{a_n}{3}\right)$

$\leq 2(1+1) = 4$ より

$0 \leq na_n \leq \log 4$

$\therefore\ 0 \leq a_n \leq \frac{\log 4}{n}$

④ $\lim_{n\to\infty} \frac{\log 4}{n} = 0$ より

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

また $na_n = \log 2\left(1+\cos\frac{a_n}{3}\right)$ より

$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} \log 2\left(1+\cos\frac{a_n}{3}\right)$

$= \log 2(1+\cos 0)$

$= \log 4$ //