

## 演習問題 2024年6月6日(木)

下の問題を解け. なお解答は配布した解答用紙に解答すること.

ただし解答に関しては答えのみならず, 答えを導出する過程をきちんと記すこと. また解答用紙は1人1枚以上提出すること.

問題 1. 次の極限の値を求めよ.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1}$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{5^k}$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

問題 2. 次の関数の微分を求めよ.

1.  $\frac{x}{x^2+1}$
2.  $\sqrt{x^2+1}$
3.  $\log(2x^2+3x)$

問題 3. 次の問いに答えよ.

1. 関数  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$  のグラフをかけ. また極大値と極小値を求めよ.
2. 関数  $g(x) = e^{-x^2}$  のグラフをかけ. また最大値を求めよ.

問題 4. 関数  $f(x) = \log(1+x)$  とする. 次の問いに答えよ.

1. 1階導関数  $f'(x)$ , 2階導関数  $f^{(2)}(x)$ , 3階導関数  $f^{(3)}(x)$  をそれぞれ求めよ.
2.  $n$ 階導関数  $f^{(n)}(x)$  を求めよ.
3. 冪級数展開の公式  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$  であることを用いて  $\log(1+x)$  を冪級数展開せよ.

問題 5. 次の問題は 2024 年度の阪大理系の問題である.<sup>1</sup> 1 以上の整数  $n$  について関数  $f_n(x)$  を

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos \frac{x}{3} \quad (x \geq 0)$$

で定める. 次の問いに答えよ.

1.  $f_n(x)$  は単調減少関数であることを示せ.
2.  $y = f_n(x)$  のグラフをかくことにより  $f_n(x) = 0$  は  $(0, +\infty)$  上にただ一つの実数解を持つことをしめせ.
3. 2. における実数解を  $a_n$  とする.  $e^{na_n} = 2(1 + \cos \frac{a_n}{3})$  であることに注意して次の不等式を示せ.

$$0 \leq a_n \leq \frac{\log 4}{n}.$$

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  と  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$  をそれぞれ求めよ.

---

<sup>1</sup>ただし一部ヒントを入れて簡単にした.

# 解答用紙

学籍番号:

名前

---