$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

1-1 $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$f''(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$f'''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

1-2 $f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} & n\text{ぐうすう} \\ \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} & n\text{きすう} \end{cases}$

1-3 $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n\text{ぐうすう} \\ 1 & n\text{きすう} \end{cases}$ より、

$$f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots \right)$$

補足

$f(x)$は hyperbolic sin とよばれる.

$\boxed{2}$ $f(x,y) = x^3+6x^2+3y^2-12xy+9x$

判別1
① $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2+12x-12y+9$

より

② $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6y-12x$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ を満たす

② $=0$ より $y = 2x$.

よって①に代入して

$$0 = 3x^2+12x-24x+9$$
$$= 3x^2-12x+9.$$
$$= (3x-3)(x-3)$$

よって $x = 1, 3$ $(x,y) = (1,2)\ (3,6)$

$y = 2, 6$

判別2
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x+12$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12$ より

$$Df = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$$

$$= (6x+12)\cdot 6 - (-12)^2$$

$$= 6^2(x+2-4)$$

$$= 36(x-2)$$

① $(x, y) = (1, 2)$

$Df(1,2) = -36 < 0$ 鞍点

② $(x, y) = (3, 6$

$Df(3,6) = 36 > 0$ 極小

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,6) = 3\cdot 6 + 12 = 30 > 0$

極小値

$$f(3,6) = 3^3 + 6\cdot 3^2 + 3\cdot 6^2 - 12\cdot 3\cdot 6 + 9\cdot 3$$

$$= 3^3 + 2\times 3^3 + 4\cdot 3^3 - 3^3(4\times 2) + 3^3$$

$$= 3^3(1+2+4-8+1) = 0.$$

答 (3, 6) で極小値 0 をとる

3 判別1 $\frac{\partial g}{\partial x}=2x$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=4y$$

$$g=x^2+2y^2-6$$

より $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}=g=0$ なる点は存在しない。

判別2 $F=f-tg$

$=x^2y-t(x^2+2y^2-6)$ とおく。

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2xy-2tx=0 \quad ①$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^2-4ty=0 \quad ②$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}=-(x^2+2y^2-6)=0 \quad ③$$

①より $2x(y-t)=0$

$x=0$ ならば $y^2=3$ より

$$(x,y,t)=(0,\pm\sqrt{3},0)$$

$x\neq0$ ならば $y=t$ で $x^2=4y^2$ より

③から $0=x^2+2y^2-6=6y^2-6$

$y=\pm1$, $x=\pm2$.

よって $(0, \pm\sqrt{3})$, $(\pm 2, 1)$ $(\pm 2, -1)$

の6点が候補。となる

$f(0, \pm\sqrt{3}) = 0$

$f(\pm 2, 1) = 4$　より

$f(\pm 2, -1) = -4$

$(\pm 2, 1)$ で最大値 4

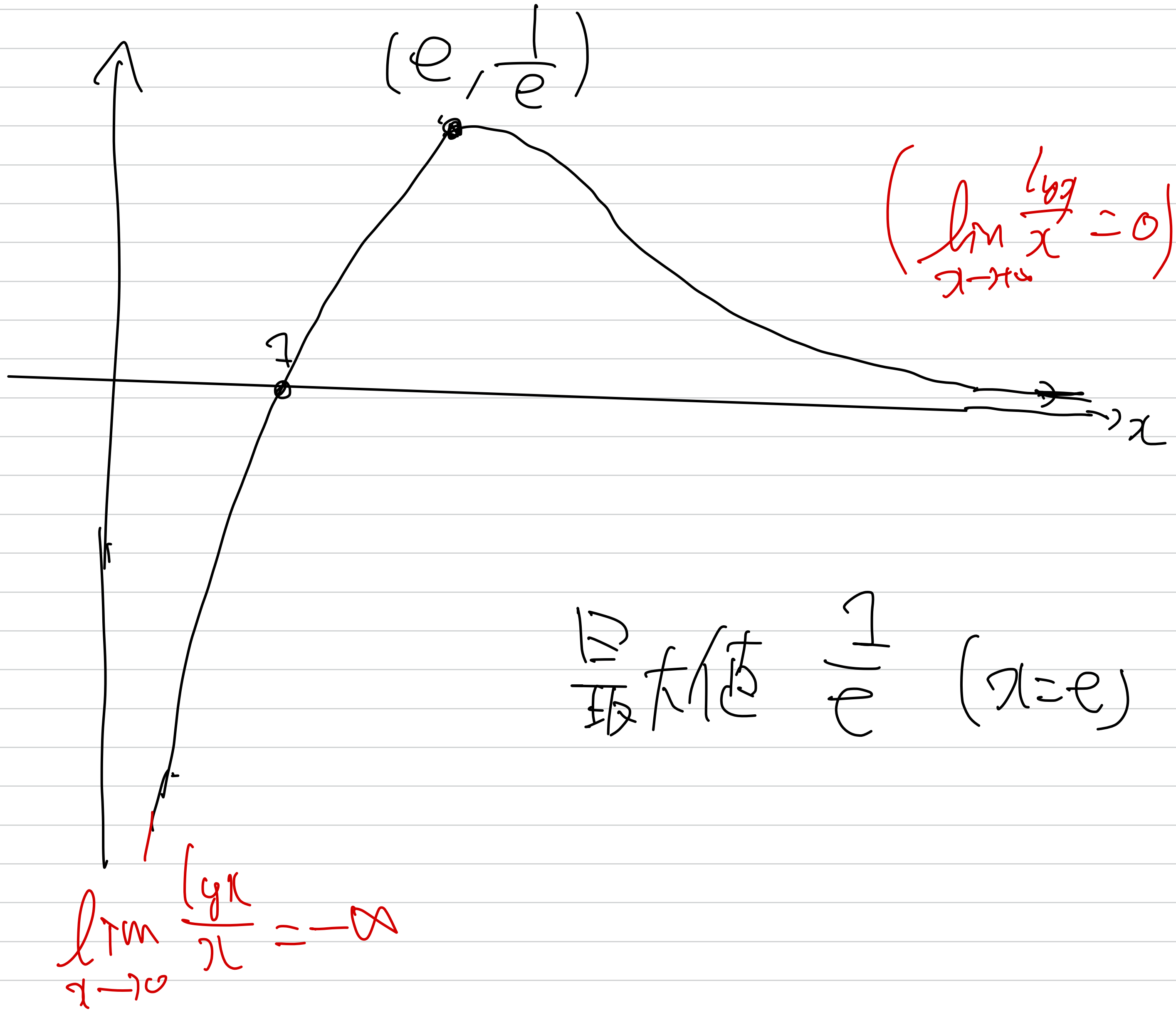
$(\pm 2, -1)$ で最小値 -4 をとる //

(4-1) $f(x) = \frac{\log x}{x}$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$ より

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	

答



最大値 $\frac{1}{e}$ $(x = e)$

4-2

$$\int_1^e \frac{\log x}{x}dx = \int_1^e (\log x)(\log x)' dx$$
$$= \left[(\log x)^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{\log x}{x}dx$$

$$\therefore \int_1^e \frac{\log x}{x}dx = \frac{1}{2}\left[(\log x)^2\right]_1^e$$
$$= \frac{1}{2}$$

4-3

$e < \pi$ より

$$\frac{\log e}{e} > \frac{\log \pi}{\pi}$$ である.

よって $0 < 2 < e$ より

$\pi \log e > e \log \pi$ である

よって $\log e^{\pi} > \log \pi^{e}$ である

よって $e^{\log e^{\pi}} > e^{\log \pi^{e}}$ であり

$e^{\pi} > \pi^{e}$ である//

5 $f(x) = \frac{x}{2}(1 + e^{-2x+2})$

(1) $f'(x) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2x+2})$

$+ \frac{x}{2}(-2e^{-2x+2})$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x+2} - xe^{-2x+2}$

$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - x\right)e^{-2x+2}$

$f''(x) = -e^{-2x+2}$

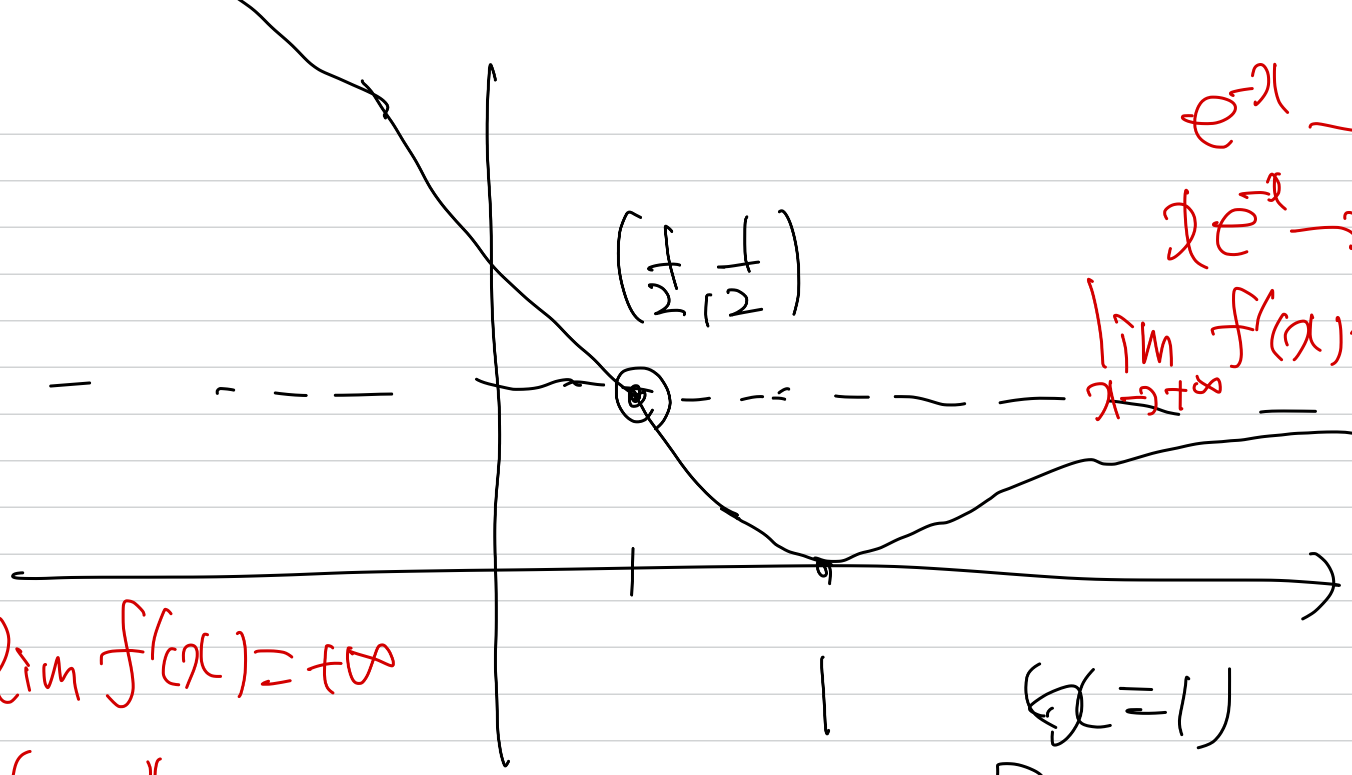
$+ \left(\frac{1}{2} - x\right)(-2)e^{-2x+2}$

$= e^{-2x+2}(-1 - 1 + 2x)$

$= (2x-2)e^{-2x+2}$.

よって

x		1	
$f''(x)$	$-$	0	
$f'(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$



$e^{-x} \to 0$
$xe^{-x} \to 0$ より
$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \frac{1}{2}$

$\lim f'(x) = +\infty$
$(e^{-x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ より$)$

$(x=1)$
最小値 0

$\boxed{2}$ グラフから $\frac{1}{2}<x<1$ なら $0<f'(x)<1/2$ がわかる

もしくは $\frac{1}{2}<x<1$ なら $f'(x)<0$ より 単調減少 なので

$$f'(\tfrac{1}{2}) > f'(x)) > f'(1) \quad \text{となり}$$

$$\frac{1}{2} > f'(x) > 0 \quad \text{となる。}$$

$\boxed{3}$ $\frac{1}{2}<x<1$ とする.

平均値の定理より

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(c) \quad \text{なる } c\in(x,1) \text{ がある}$$

$\frac{1}{2}<c<1$ より $0<f'(c)<\frac{1}{2}$ となるので (③から)

$$0<\frac{f(x)-1}{x-1}<\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 0>f(x)-1>\frac{1}{2}(x-1) \quad (x-1<0)$$

$\Rightarrow \quad 1>f(x)$ かつ

$$f(x)>\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}>\frac{1}{2} \;// \quad (x>\tfrac{1}{2})$$

$\boxed{4}$ ③より $\frac{1}{2}<\alpha_n<1$ となる.

よって 平均値の定理より ある $c\in(\alpha_n,1)$ があって

$$\frac{f(\alpha_n)-f(1)}{\alpha_n-1}=f'(c) \text{ となる}$$

③から $\frac{1}{2}<c<1$ より ②から $0<f'(c)<\frac{1}{2}$ となり

$$|f(\alpha_n)-1|<\frac{1}{2}|\alpha_n-1|$$

よって $|\alpha_{n+1}-1|<\frac{1}{2}|\alpha_n-1|$ となる

$\boxed{5}$ $|a_{n+1}-1| < \frac{1}{2}|a_n-1|$

$< \left(\frac{1}{2}\right)^2 |a_{n-1}-1|$

$< \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_1-1|$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ より

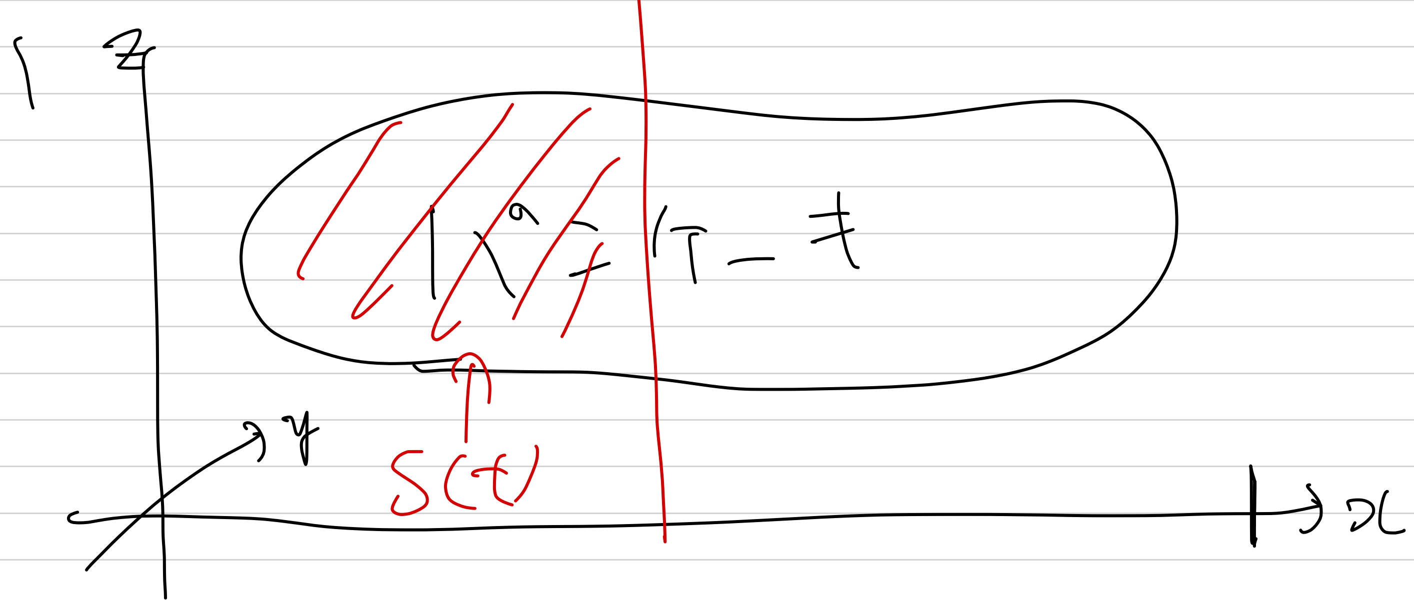
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ より

はさみうちの原理から

$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}-1| = 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 1$ //

おまけ問題



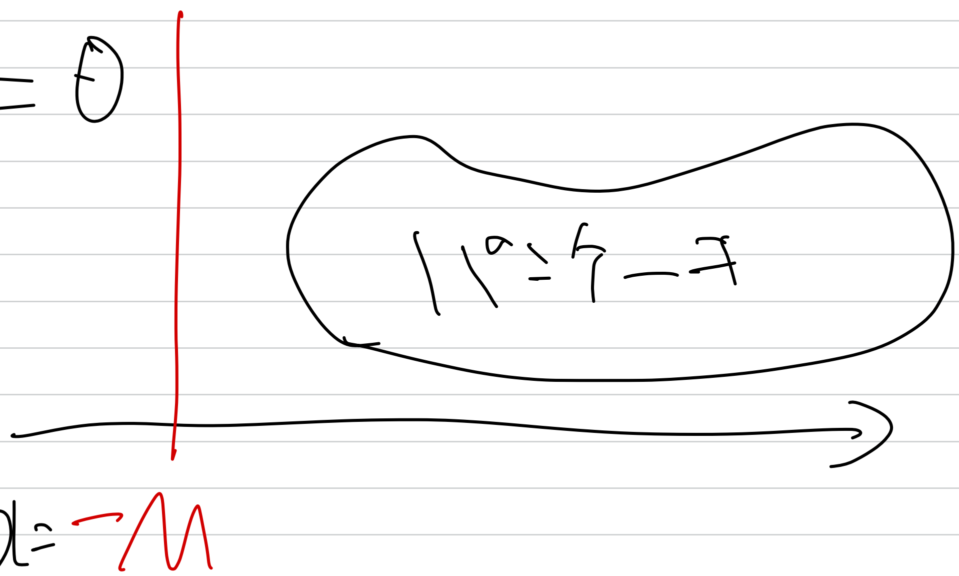
パンケーキを上図のようにおく，重さをVとする

$S(t) = \left(\begin{array}{l}\text{x=tで切ったときの}\\ \text{左側のパンケーキの重さ}\end{array}\right)$

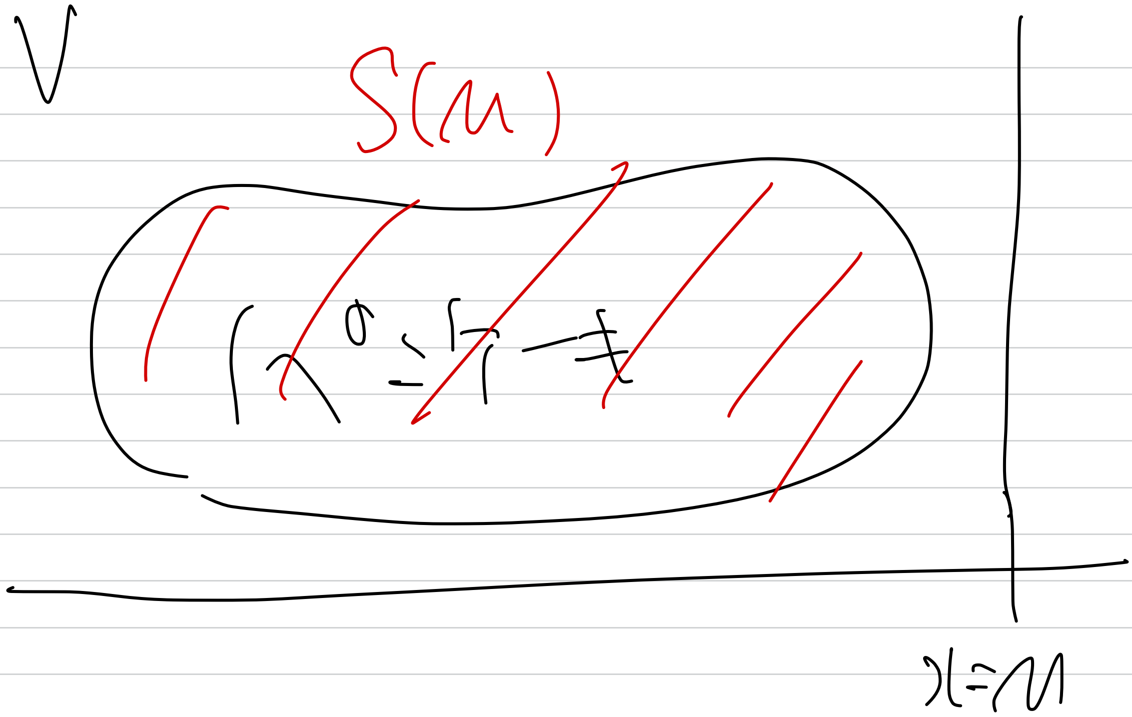
とする。

するとある$M>0$があって

$S(-M)=0$



$S(M)=V$



となる

$S(t)$は$[-M,M]$上の連続関数で

$S(-M)=0$
$S(M)=V$　より中間値の定理より

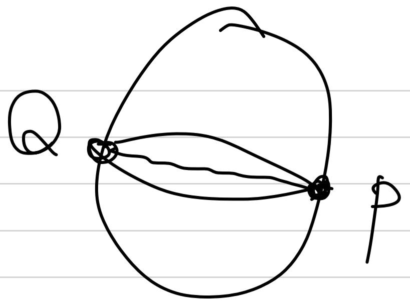
ある $c\in[-M,M]$ で

$f(c)=\frac{1}{2}V$ となるものがある.

よって　$x=c$ できってやれば

パンケーキを2等分できる

② 赤道上のある地点をとりその点をPとする



(たとえばエクアドルなど)

Pのまうらの点をQとする

$P = (0, 0, 1)$
$Q = (0, 0, -1)$ として良い。また、地球の半径も1としてよい。

Tを地球上の気温関数とし

$$S : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\theta \longmapsto T(\cos\theta, \sin\theta, 0) - T(\cos(\theta+\pi), \sin(\theta+\pi), 0)$$

とおく

これは

"地点A $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ の気温"

$-$ "地点B $(\cos(\theta+\pi), \sin(\theta+\pi), 0)$ の気温"

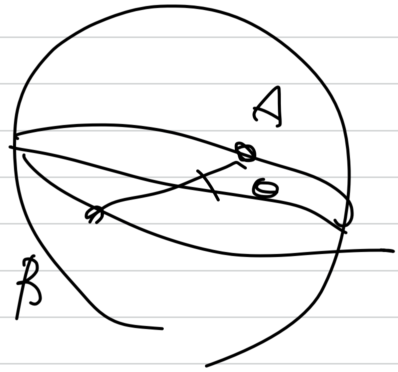
を表す関数である。

AとBはちょうどまうらにあるので

$S(\theta)=0$ なる θ が存在

すれば AとB(Aのまうらの点)との交点は

同じになる



あとは場合わけする。

$S(0)=0$ なら $\theta=0$ とおく。

$S(0)>0$ なら

$S(\pi)=-S(0)<0$ より

中間値の定理から ∃θ があって

$S(\theta)=0$ となる

以上より $S(\theta)=0$ なる θ が存在し

$A=(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ がその地点である

$S(0)<0$ の場合も同じである。