期末試験

2024 年度春夏学期 大阪大学 全学共通教育科目 解析学入門 経（161〜）

岩井雅崇 (いわいまさたか) 2024/07/25

下の問題を解け. ただし解答に関しては答えのみならず, 答えを導出する過程をきちんと記すこと. また e をネイピア数とし π を円周率とする.

第 1 問. 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

とおく. 次の問いに答えよ.

1. 1 階導関数 $f'(x)$, 2 階導関数 $f^{(2)}(x)$, 3 階導関数 $f^{(3)}(x)$ をそれぞれ求めよ.
2. n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.
3. マクローリン展開 (べき級数展開・テイラー展開) の公式 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ を用いて $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ をマクローリン展開せよ.

第 2 問. $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級関数を

$$f(x,y) = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x$$

とする. $f(x,y)$ について極大点・極小点を持つ点があれば, その座標と極値を求めよ. またその極値が極大値か極小値のどちらであるか示せ.

第 3 問.

$$f(x,y) = x^2 y, \quad g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 6$$

とする. $g(x,y) = 0$ のもとでの $f(x,y)$ の最大値と最大値をとる点の座標, 最小値と最小値をとる点の座標を全て求めよ.

つまり $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$ とするとき, f の S 上での最大値と最大値をとる点の座標, 最小値と最小値をとる点の座標を全て求めよ. ただし S 上で $f(x,y)$ が最大値・最小値をとることは認めて良い.

第 4 問.

$$\begin{array}{cccc} f: & (0,+\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{\log x}{x} \end{array}$$

とおく. 次の問いに答えよ.

1. 関数 $f(x)$ のグラフをかけ. また最大値を求めよ.
2. 定積分 $\int_1^e f(x)dx$ を求めよ. (ヒント: 部分積分法)
3. e^π と π^e はどちらが大きいか? 理由とともに答えよ. ただし必要ならば $2 < e < \pi$ であることを用いて良い.

第 5 問に続く

第 5 問 次の問題は 2005 年東京大学理系第 3 問の問題である. (ただし解きやすいように改題した.)

$$f(x) = \frac{x}{2}\left(1 + e^{-2(x-1)}\right)$$

とおく. また数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$\alpha_1 = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{n+1} = f(\alpha_n) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

として定める. 次の問いに答えよ.

1. $f'(x)$ のグラフを書け. また $f'(x)$ の最小値を求めよ.
2. $\frac{1}{2} < x < 1$ ならば $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$ であることを示せ.
3. $\frac{1}{2} < x < 1$ ならば $\frac{1}{2} < f(x) < 1$ であることを示せ.
4. $n = 1, 2, 3, \ldots$ について
$$|\alpha_{n+1} - 1| < \frac{1}{2}|\alpha_n - 1|$$
であることを示せ.
5. $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$ を求めよ.

ただし解答に際し, 次の定理 (平均値の定理) を用いて良い.

[定理] $f(x)$ を $[a, b]$ 上で連続, (a, b) 上で微分可能な関数とする. このとき

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

となる $c \in (a, b)$ が存在する.

おまけ問題

1. 1 枚のパンケーキを 1 回の包丁のカットで重さを 2 等分にできることを示せ. ただしパンケーキは円形とは限らないとする.
2. 地球上には常に, ある赤道上の地点 x とその真裏の地点 y で, 地点 x と地点 y の気温が同じ値になっている組 (x, y) が存在することを示せ. ただし地球は球体であると仮定して良い.

問題は以上である.