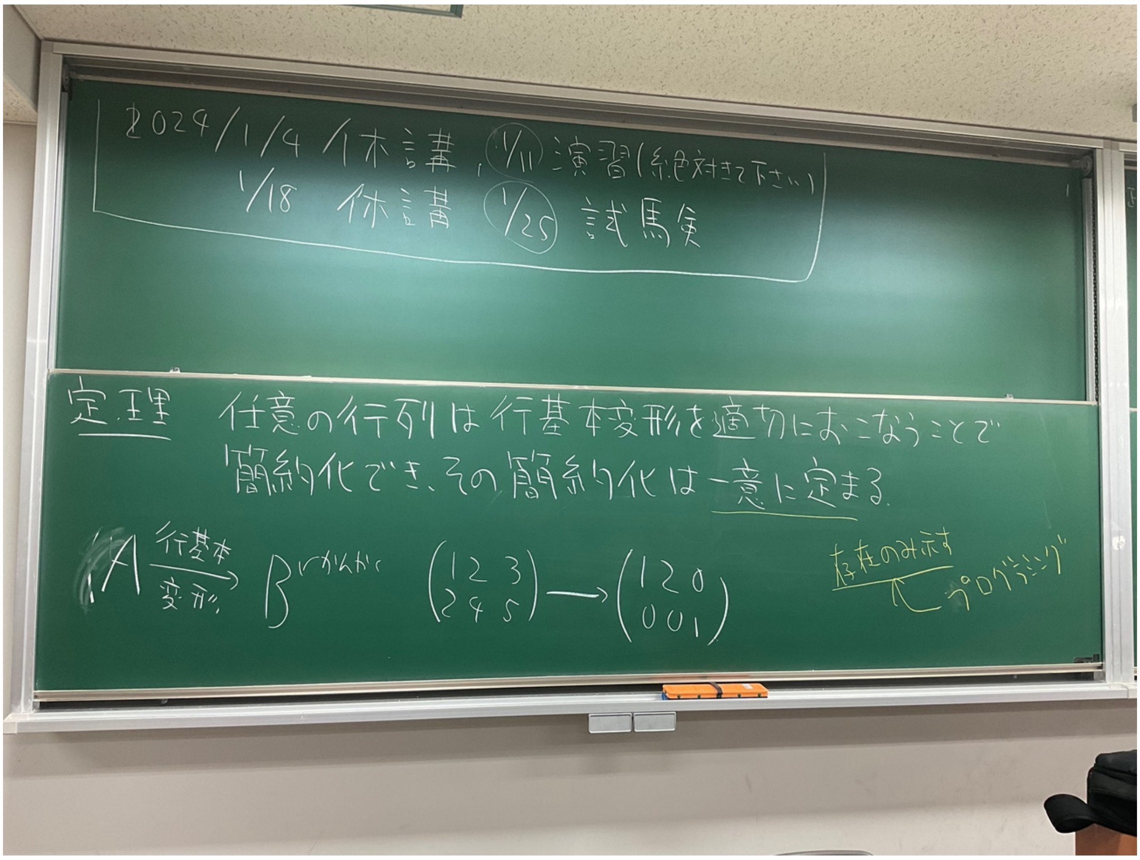
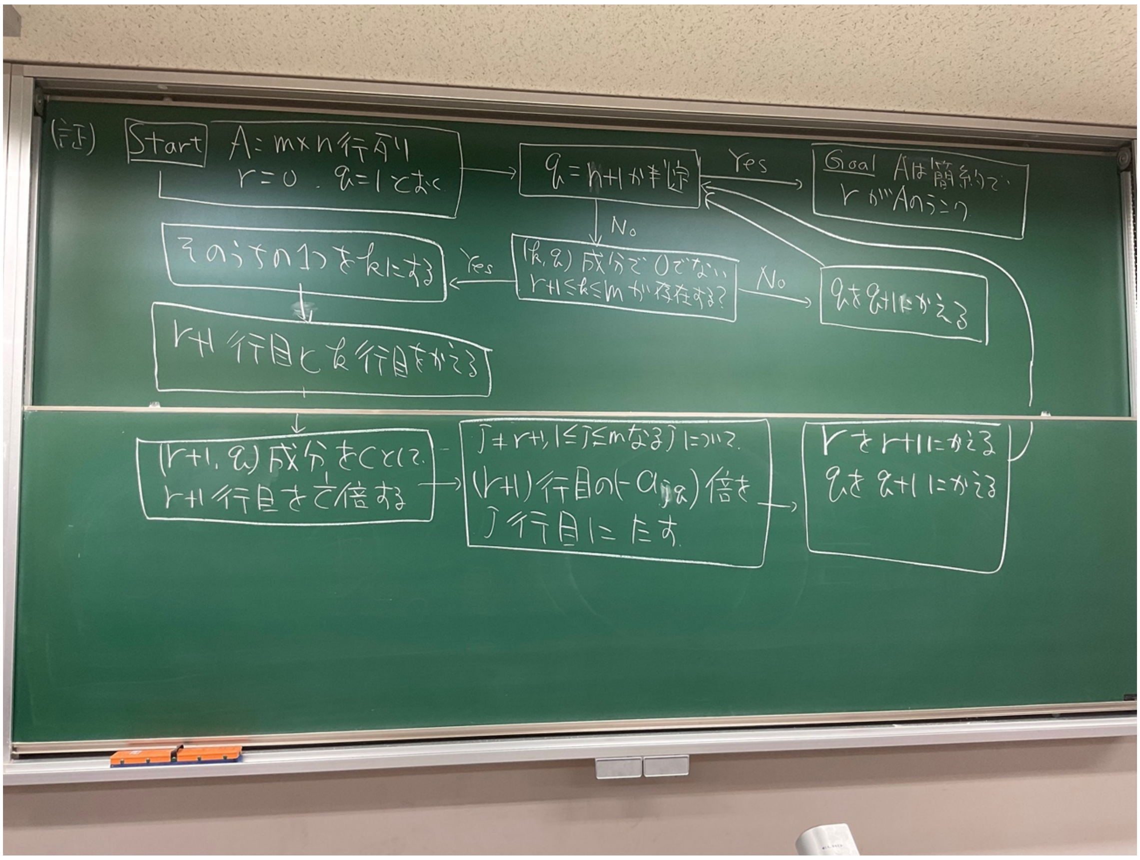

2024/1/4 休講, 1/11 演習(絶対きて下さい)
1/18 休講 1/25 試験
定理 任意の行列は行基本変形を適切におこなうことで
簡約化でき、その簡約化は一意に定まる.
A 行基本変形 B ←かんやく
存在のみ示す
プログラミング


(証)
Start
A: m×n 行列
r=0, q=1 とおく
q=n+1 か判定
Yes
Goal Aは簡約で
r が Aのランク
No
(k,q) 成分で 0でない
r+1≤k≤m が存在する?
Yes
そのうちの1つを k にする
No
q を q+1 にかえる
r+1 行目と k 行目をかえる
(r+1, q) 成分を c として
r+1 行目を 1/c 倍する
j≠r+1, 1≤j≤m なる j について
(r+1) 行目の(−a_jq)倍を
j 行目にたす
r を r+1 にかえる
q を q+1 にかえる

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\end{pmatrix}$ $\boxed{\begin{matrix}m=2\\n=3\end{matrix}}$ $n+1=4$

Start → $r=0,\ q=1$ とする → $q=1\neq 4$ ($r=0$) → No → $(k,1)$ 成分で0でないものがある？($r+1=1\leq k\leq m=2$) ($r=0$) $(1,1)(2,1)$ → Yes → そのうちの1つをkにする $k=1$

$A=\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&3\\\boxed{2}&4&5\end{pmatrix}$

→ $1=r+1$行目 $1=k$行目をいれかえる ($A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\end{pmatrix}$)

→ $(r+1,q)=(1,1)$成分を$c=1$として $(r+1)=1$行目を $\frac{1}{c}=\frac{1}{1}$倍する

$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\end{pmatrix}=A$

→ $j\neq r+1,\ 1\leq j\leq m=2$ なる j ($j=2$のみ) について $(r+1)=1$行目の $-a_{jk}=-a_{21}=-2$倍を $j=2$行目にたす

$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&-1\end{pmatrix}$

2行目に1行目の-2倍をたせ

→ $r=1,\ q=2$にする → …

§ n次正方行列の理論 ($n\geq 3$) (正則行列, 行列式 $n=3$)

"ほとんど$n=2$と同じ"

定義 Aをn次正方行列とする (n次正方)

Aが正則であるとは, ある行列Bがあって

$AB=BA=E_n$ (単位行列) となること。このときAを正則といい

BをAの逆行列という。

例 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$のとき Aが正則 $\Longleftrightarrow$ $\underset{(\det A)}{ad-bc}\neq 0$

逆行列 $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

定理 Aをn次正方行列として以下は同値

(1) $\mathrm{rank}A=n$

(2) Aの簡約化はE_nである

(3) $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$について$Ax=b$なる$x$は唯一つ存在

(4) $Ax=\vec{0}$なるxは唯一つ存在

(5) Aは正則

(6) $\boxed{\det A\neq 0}$ (n=3のみていぎする)

補題 任意のA $m\times n$行列、あるR: $m\times m$正則行列、RAは簡約行列になる

証 $(1)\Rightarrow(2)$ | (1)$\Rightarrow$(補題) $RA=B$、$\underset{n}{\mathrm{rank}B}$、B簡約、$n\times n$行列

$\Rightarrow B=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}=E_n$しかない

$(2)\Rightarrow(3)$ | (2)$\Rightarrow$(補題) $RA=E_n$なる正則Rがある$\Rightarrow$ $Ax=b$なるxについて

$x=(RA)x=R(Ax)=\boxed{Rb}$ 存在する、唯一つ

$(3)\Rightarrow(4)$ 明らか

$(4)\Rightarrow(1)$ 背理法 ((1)が成立しないとする)

((4)のみ(2)) rankA<nなら $RA=B$. $\mathrm{rank}B<n$かつ Bが簡約

$B=$

$\Rightarrow$ Bの ~~n行目~~ j列目は $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ である(あるj≤n)

$\Rightarrow Ae_j=0$ $\left(Ae_j=R^{-1}RAe_j=R^{-1}\underbrace{Be_j}=\vec{0}\right.$

(4)に矛盾

$e_j=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\leftarrow j$

$\left(\begin{array}{ccc} \ast & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & ? \end{array}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\leftarrow j=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$(2)\Rightarrow(5)$ $RA=E_n$より $A=R^{-1}$ 正則 (補題)

$(5)\Rightarrow(4)$ $Ax=0$なら$x=A^{-1}(Ax)=A^{-1}\vec{0}=\vec{0}$