連立1次方程式の解き方（基本変形をつかった解き方）

定義 連立1次方程式

$$☆\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3y+4z+5w=11 \\ x+y+z+2w=13 \\ x-y-5z-7w=17 \end{cases}$$

a_{ij}, b_j 数
x_i 未知数

について

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$ を☆の係数行列という

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ とおくと

連立1次方程式☆を解く $\Longleftrightarrow$ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ なる $\mathbf{x}$ を求める

$[A:\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$ を☆の拡大係数行列という

例 $☆\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-4y=9 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

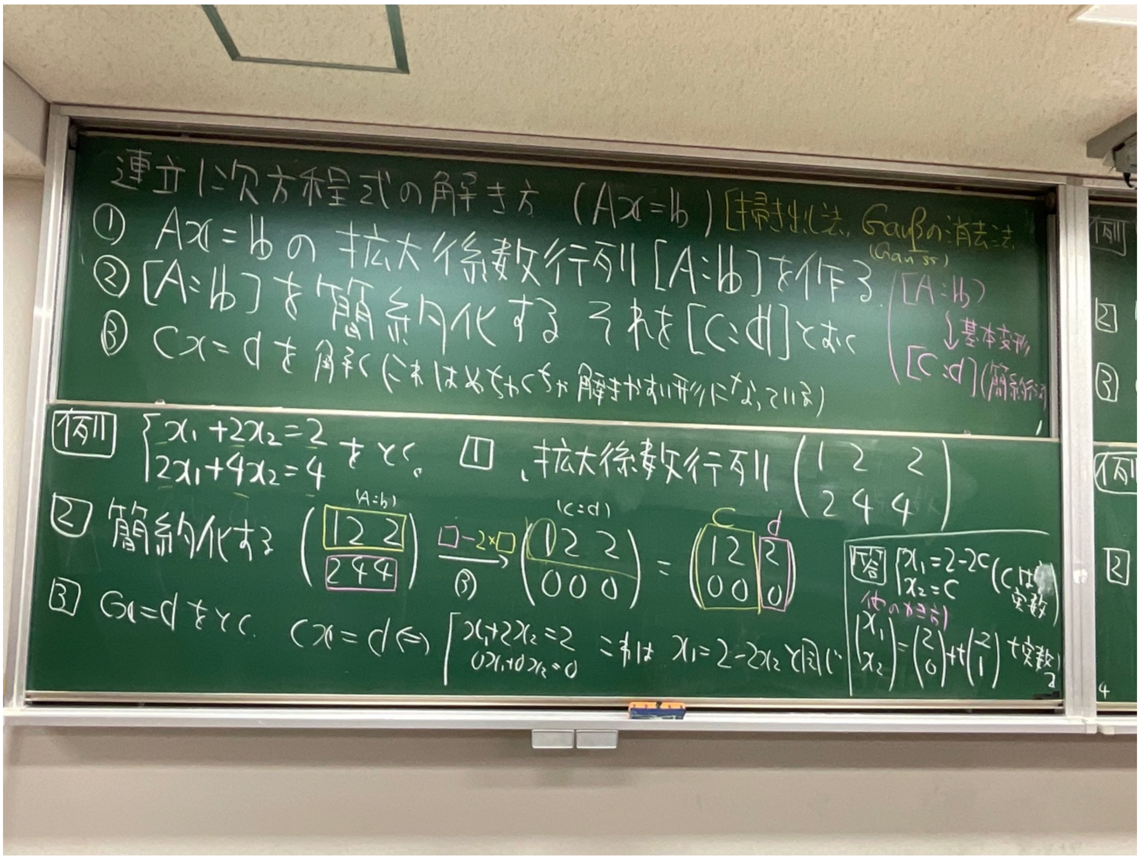
☆を解く $\Longleftrightarrow$ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ なる $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求める $\Longleftrightarrow$ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ なる $\mathbf{x}$ を求める

$[A:\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 1x-4y=9 \end{cases}$

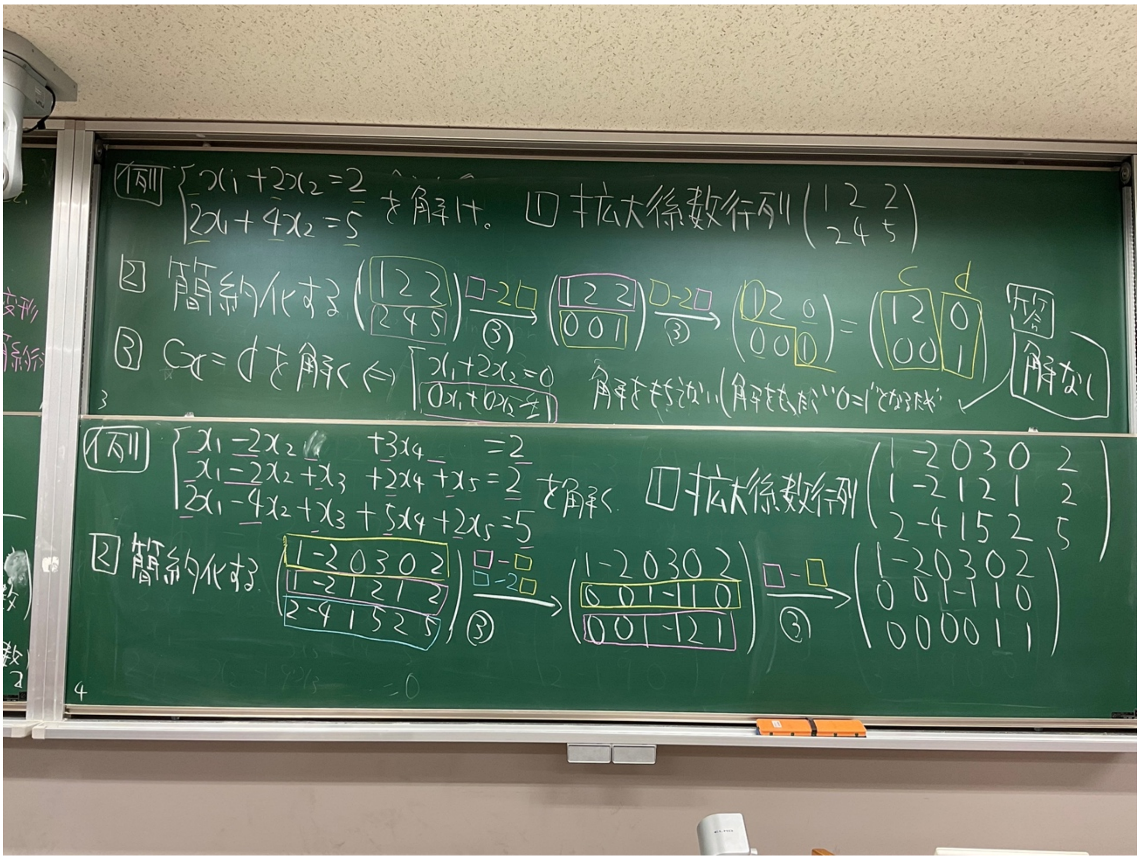
連立1次方程式
↓（とりだす）
数のデータ
（行列）

例 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 7 \\ x_1 \qquad - 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 9x_3 \qquad = 0 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$, $[A:\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



連立1次方程式の解き方 ($Ax=b$) [掃き出し法, Gaußの消去法 (Gauss)]
① $Ax=b$ の拡大係数行列 $[A:b]$ を作る
② $[A:b]$ を簡約化する それを $[C:d]$ とおく
③ $Cx=d$ を解く (これはめちゃくちゃ解きやすい形になっている)
$[A:b]$ ↓基本変形 $[C:d]$ (簡約行列)
例 $\begin{cases} x_1+2x_2=2 \\ 2x_1+4x_2=4 \end{cases}$ をとく。
1 拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
2 簡約化する $(A:b)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[③]{□-2\times□} (C:d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ C d
3 $Cx=d$ をとく. $Cx=d \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2=2 \\ 0x_1+0x_2=0 \end{cases}$ これは $x_1=2-2x_2$ と同じ
答 $\begin{cases} x_1=2-2c \\ x_2=c \end{cases}$ (cは実数)
他のかき方 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (tは実数)



例 $\begin{cases} x_1+2x_2=2 \\ 2x_1+4x_2=5 \end{cases}$ を解け。
1 拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
2 簡約化する $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[③]{□-2□} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[③]{□-2□} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ C d
3 $Cx=d$ を解く $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ 0x_1+0x_2=1 \end{cases}$ 解をもたない (解をもたらば "0=1" となるため)
答 解なし
例 $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_4=2 \\ x_1-2x_2+x_3+2x_4+x_5=2 \\ 2x_1-4x_2+x_3+5x_4+2x_5=5 \end{cases}$ を解く.
1 拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
2 簡約化する $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[③]{□-□,\ □-2□} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[③]{□-□} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[③]{\square - \square} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

C　d

$\boxed{3}$ $Cx=d$ をとく $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 3x_4 + 0\cdot x_5 = 2 \\ 0\cdot x_1 + 0x_2 + 1x_3 - 1x_4 + 0\cdot x_5 = -1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x_1 - x_2 \quad + 3x_4 \quad = 2} \\ \boxed{x_3 - x_4 \quad = -1} \\ \boxed{x_5 = 1} \end{cases}$$

$\boxed{答}$

$$\begin{cases} x_1 = 2 + c_2 - 3c_4 \\ x_2 = c_2 \\ x_3 = -1 + c_4 \\ x_4 = c_4 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

c_2, c_4 は任意定数

（なんでもいい）

もしくは（かきかた）

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2s-3t \\ s \\ -1+t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$s, t \in \mathbb{R}$

（s, t 実数）

もしくは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2

$\boxed{例}$

$$\begin{cases} x_1 \quad - x_3 \quad - 2x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 \quad + x_5 = -2 \\ -x_1 \quad + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \quad - 3x_5 = 1 \end{cases}$$

を解く

$\boxed{1}$ 拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ 簡約化する

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[③]{\substack{\square + \square \\ \square - 2\square}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[③]{\square - \square} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

-1

3

$$\xrightarrow[③]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

C　d

$\boxed{3}$ $Cx=d$ をとく $\Leftrightarrow$

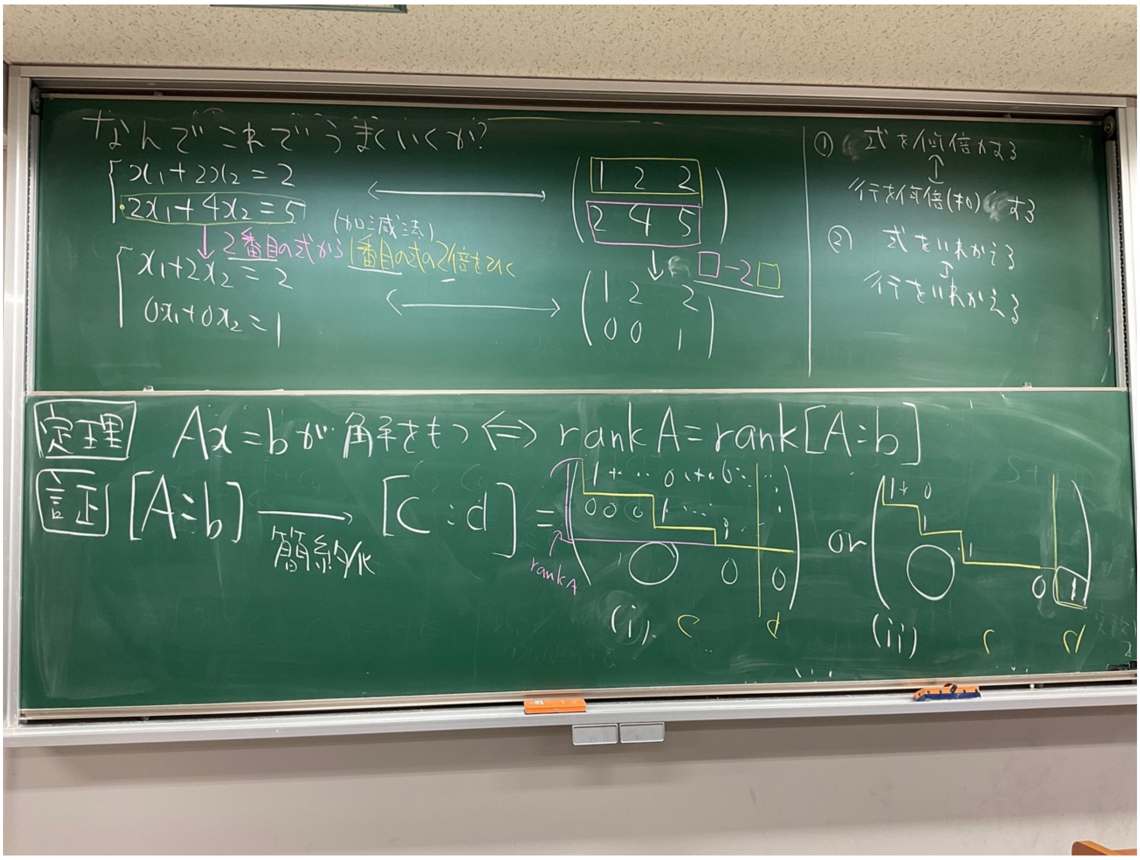
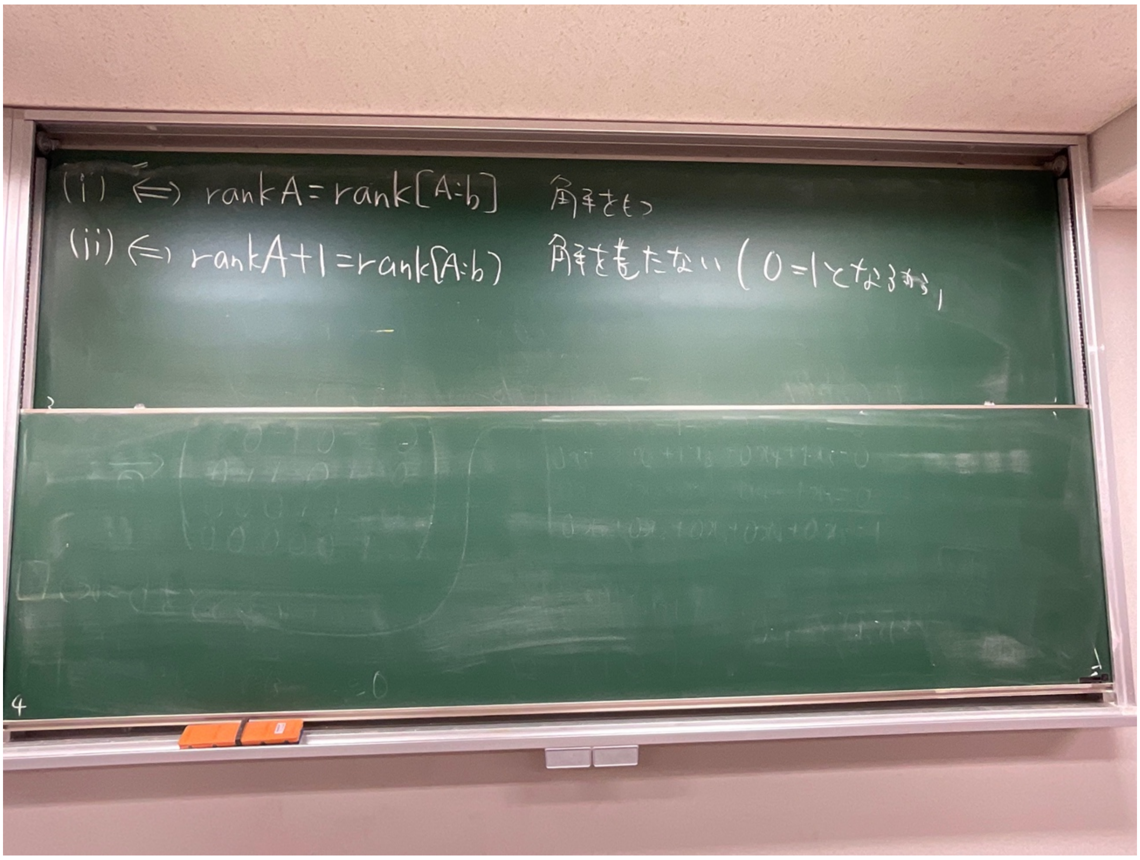
$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 0x_2 - 1\cdot x_3 + 0x_4 - 2x_5 = 0 \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1x_3 + 0\cdot x_4 + 1\cdot x_5 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 - 1x_5 = 0 \\ \boxed{0\cdot x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0\cdot x_5 = 1} \end{cases}$$

もし解が存在したら "$0 = 1$" となってしまう $\Rightarrow$

$0 = 1$

$\boxed{答}$ 解なし

4


なんでこれでうまくいくか？
$x_1+2x_2=2$
$2x_1+4x_2=5$
(加減法)
2番目の式から1番目の式の2倍をひく
$x_1+2x_2=2$
$0x_1+0x_2=1$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
□−2□
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
① 式を何倍かする
行を何倍(≠0)かする
② 式をいれかえる
行をいれかえる
定理 $Ax=b$が解をもつ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}[A:b]$
証 $[A:b] \xrightarrow[\text{簡約化}]{} [C:d]=$
rankA
or
(i) C d
(ii) C d

(i) $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}[A:b]$ 解をもつ
(ii) $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}\,A+1=\mathrm{rank}[A:b]$ 解をもたない（0=1となるから）