[正規直交基底] $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$ で $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$, $u_1 \cdot u_2 = 0$ となるもの

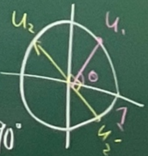
(連絡事項) 11/30(木) 休講 (11/28(火) があります。)
11/16 (来週) は絶対にきて下さい。

[定理] $\mathbb{R}^2$ の 正規直交基底はある $\theta \in \mathbb{R}$ をもちいて $\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\}$ とかける

$\boxed{\text{証}}$ $\|u_1\| = 1$ より $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$ とかける

$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ とかくと $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi = 0$

$\Rightarrow \cos(\theta - \varphi) = 0 \Rightarrow \theta - \varphi = 90^\circ$ or 270° たとえば $\varphi = \theta + 90^\circ$ なら $u_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ となる



$\boxed{\text{定義}}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について 転置行列 ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とする

- A が直交行列 $\Longleftrightarrow {}^tAA = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- A が対称行列 $\Longleftrightarrow {}^tA = A$ ($\Longleftrightarrow b = c$)

$\boxed{\text{例}}$ $A \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 直交行列 ${}^tA = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$

(左に θ 度回転する変換)

(−θ 回転)

${}^tAA = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

[定理] $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ が直交行列 $\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ が正規直交基底

証) ${}^tA = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ より ${}^tAA = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1x_2+y_1y_2 \\ x_1x_2+y_1y_2 & x_2^2+y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ が正規直交基底 $\Leftrightarrow$ $x_1^2+y_1^2 = x_2^2+y_2^2 = 1,\ x_1x_2+y_1y_2 = 0.$

系) Aが直交行列 $\Rightarrow$ $A = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\det=1}$ or $\underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}}_{\det=-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\theta回転}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{x=yを軸に対称にする}$

定理 A対称行列のときある直交行列Pがあって ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ と対角化される

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$ $\begin{pmatrix} \cos -\frac{\pi}{4} & -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin -\frac{\pi}{4} & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$ ${}^tP = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$

$\cos -\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin -\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

${}^tPAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

2

3 補題 ① Aが対称行列 $\Rightarrow$ 固有値は実数

② 固有値が実数な行列Bはある直交行列Pで$\det P = 1$となるものを用いて ${}^tPBP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & x \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ となる(上三角化)

証 $\det(A - tE_2) = 0$ の解が実数であることをいう

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ (A対称)

$\det(A - tE_2) = \det\begin{pmatrix} a-t & b \\ b & d-t \end{pmatrix} = (a-t)(d-t) - b^2 = 0$

$\Rightarrow \underbrace{t^2}_{A} \underbrace{-(a+d)}_{B} t \underbrace{-b^2+ad}_{C} = 0$

$Ax^2+Bx+C=0$ の解 $(A \neq 0)$

$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A}$

判別式 $(a+d)^2 - 4(-b^2+ad) = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0 \Rightarrow$ 実数解をもつ

(B^2-4AC)

② $A\vec{v_1}=\lambda\vec{v_1}$ となる固有値 λ_1 と $\vec{v_1}\in\mathbb{R}^2$ をとる

$\|\vec{v_1}\|=1$ としてよい，$\{\vec{v_1},\vec{v_2}\}$ が正規直交基底になるように $\vec{v_2}$ をとる

$Q=(\vec{v_1}\ \vec{v_2})=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ とおくと $AQ=Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & x \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ となる

直交行列 $\det Q=1$ としてよい　$\therefore\ {}^tQAQ=\begin{pmatrix} \lambda_1 & x \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

定理の証明

A 対称 $\underset{①}{\Longrightarrow}$ 固有値は実数 $\underset{②}{\Longrightarrow}$ ${}^tPAP=\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ となる直交行列 P がある

${}^t(AB)={}^tB\cdot{}^tA$

$\Longrightarrow {}^t({}^tPAP)={}^t\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$

${}^tP\,{}^tA\,{}^t({}^tP)={}^tPAP=\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow a=0$

$b=\lambda_2$ とおけばよい．

前半 2×2行列

3 $m\times n$ 行列

(行列の演算を再定義する)

$\begin{array}{c|c} & n \\ \hline m & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$ を $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$

ともかく

前半 ・行列の計算 (2×2)

・対角化 (2×2)

後半 ・連立一次方程式

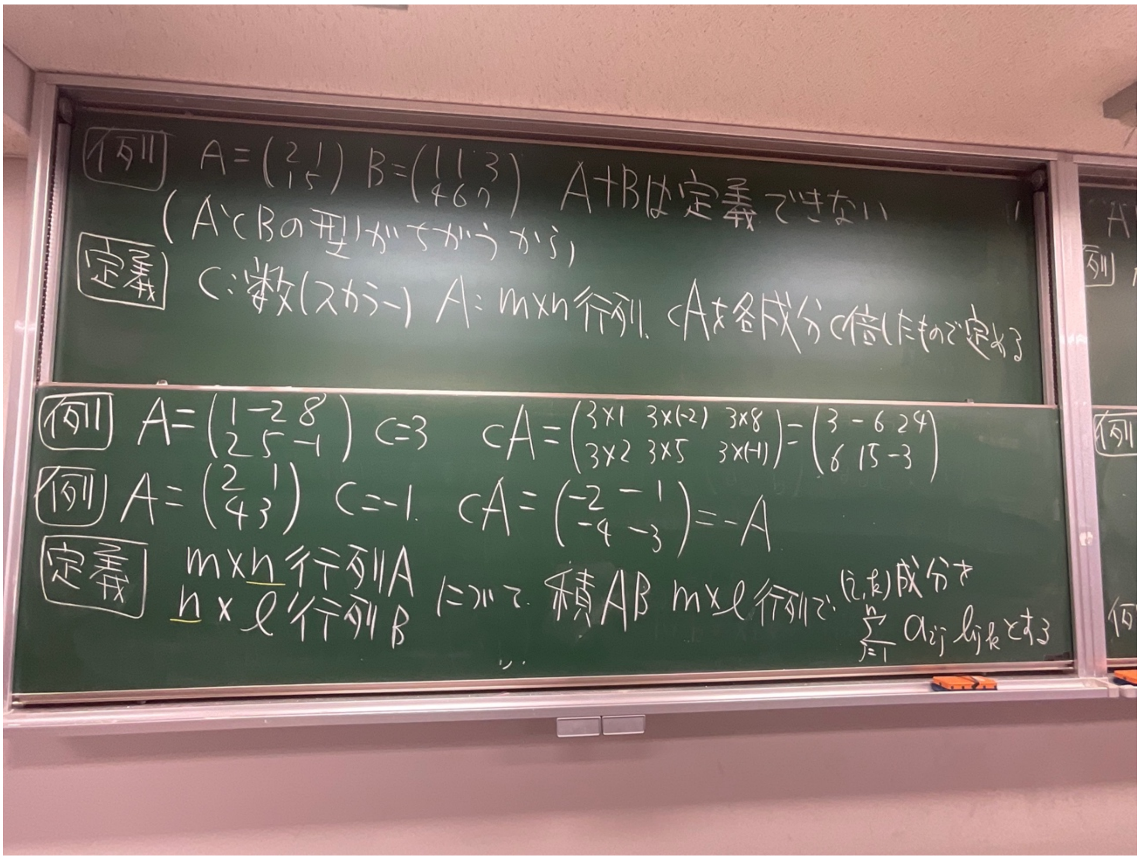
$\begin{cases} 2x+3y+4z+5w=5 \\ 2x+10y+11z+10w=3 \end{cases}$

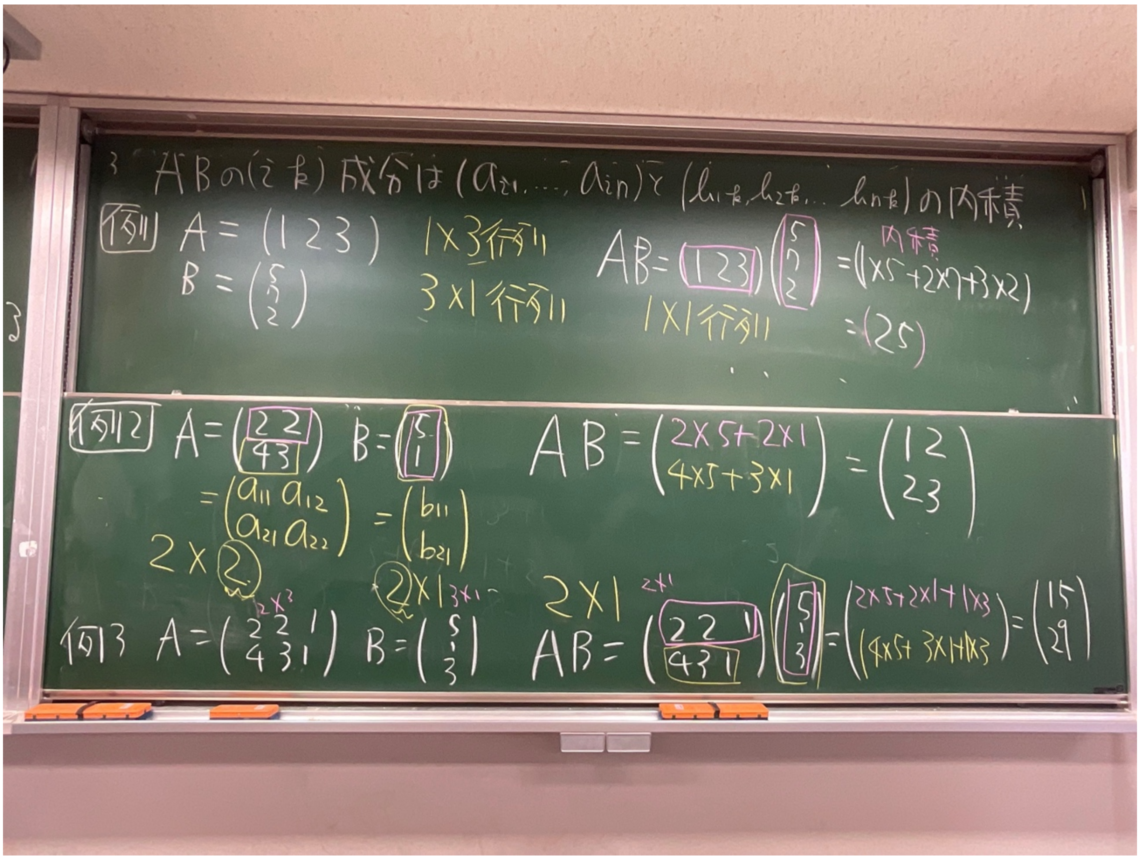
定義 $m\times n$ 行列 A, B について $A\pm B$ を各成分の足し算ひき算で定義

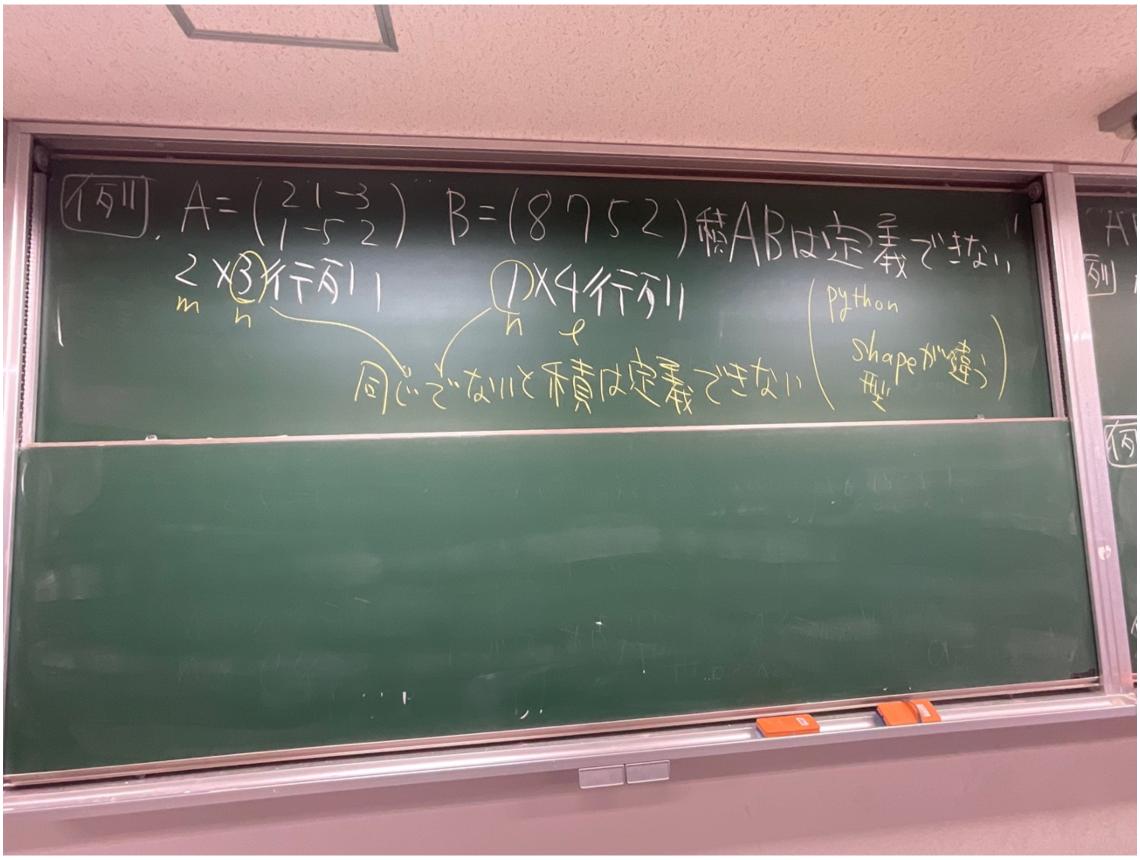
例 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$　$B=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A+B=\begin{pmatrix} 1+(-2) & -2+5 & 8+1 \\ 2+3 & 5+(-1) & 1+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix} 1-(-2) & -2-5 & 8-1 \\ 2-3 & 5-(-1) & 1-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 7 \\ -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$


例 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&3\\4&6&7\end{pmatrix}$ A+Bは定義できない
(AとBの型がちがうから)
定義 c:数(スカラー) A: m×n行列. cAを各成分c倍したもので定める
例 $A=\begin{pmatrix}1&-2&8\\2&5&-1\end{pmatrix}$ $c=3$ $cA=\begin{pmatrix}3\times1&3\times(-2)&3\times8\\3\times2&3\times5&3\times(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-6&24\\6&15&-3\end{pmatrix}$
例 $A=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$ $c=-1$. $cA=\begin{pmatrix}-2&-1\\-4&-3\end{pmatrix}=-A$
定義 m×n行列A
n×l行列B
について. 積AB m×l行列で (i,k)成分を
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ とする


ABの(i,k)成分は $(a_{i1},\dots,a_{in})$ と $(b_{1k},b_{2k},\dots,b_{nk})$ の内積
例 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$ 1×3行列
$B=\begin{pmatrix}5\\7\\2\end{pmatrix}$ 3×1行列
内積
$AB=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\7\\2\end{pmatrix}=(1\times5+2\times7+3\times2)$
$=(25)$
1×1行列
例2 $A=\begin{pmatrix}2&2\\4&3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ $AB=\begin{pmatrix}2\times5+2\times1\\4\times5+3\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\23\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{21}\end{pmatrix}$
2×2 2×1
2×3 3×1 2×1 2×1
例3 $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\4&3&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}$ $AB=\begin{pmatrix}2&2&1\\4&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times5+2\times1+1\times3\\4\times5+3\times1+1\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\29\end{pmatrix}$


例
A = (2 1 −3 / 1 −5 2)
B = (8 7 5 2)
積ABは定義できない
2×3行列
m n
1×4行列
n l
同じでないと積は定義できない
python
shapeが違う
型