対角化

A：2×2行列

ある正則行列 P があって $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ （λ ラムダ）

A は対角化可能という

対角化可能 $\Rightarrow$ A^n がかんたんに求まる

- 対角化
- 行列の計算
- 連立1次方程式

1

例 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ $P^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\1&3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&0\\0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}$$

A は対角化可能

$$(P^{-1}AP)^n=\underbrace{P^{-1}APP^{-1}AP\cdots P^{-1}APP^{-1}AP}_{n\text{こ}}$$

$$=P^{-1}A^nP$$

2

3

$$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}=P^{-1}A^nP$$

$AB \neq BA$

$$\therefore A^n=P(P^{-1}AP)^nP^{-1}$$

両辺に左から P かけて、右から P^{-1} かける

$$=P\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+(-1)^n & 3^n-(-1)^n\\ 3^n-(-1)^n & 3^n+(-1)^n\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}13&14\\14&13\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}a_0\\b_0\end{pmatrix}$$

対角化の方法 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とする

$(a-t)(d-t)-bc=0$

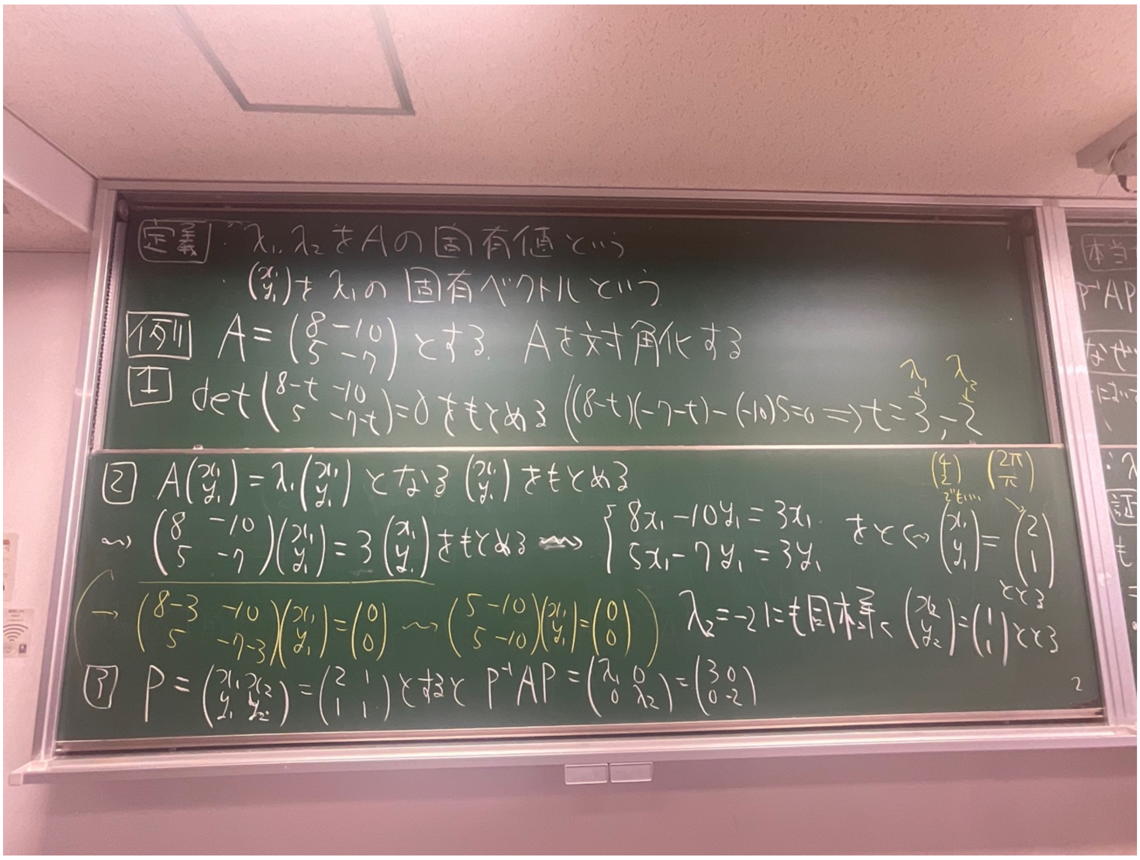
手順1 $\det(A-tE_2)=\det\begin{pmatrix}a-t&b\\c&d-t\end{pmatrix}=0$ の解を求める

解を λ_1, λ_2 とする

手順2 $A\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ となる解 $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ をもとめる。λ_2 も同じ

手順3 $P=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$ となる

4



1

定義 ・λ_1, λ_2 をAの固有値という

・$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ を λ_1 の固有ベクトルという

例 $A=\begin{pmatrix}8&-10\\5&-7\end{pmatrix}$ とする. Aを対角化する

1 $\det\begin{pmatrix}8-t&-10\\5&-7-t\end{pmatrix}=0$ をもとめる $\left((8-t)(-7-t)-(-10)5=0 \Longrightarrow t=\overset{\lambda_1}{3}, \overset{\lambda_2}{-2}\right.$

2 $A\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ となる $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ をもとめる

$\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\pi\\\pi\end{pmatrix}$ でもいい

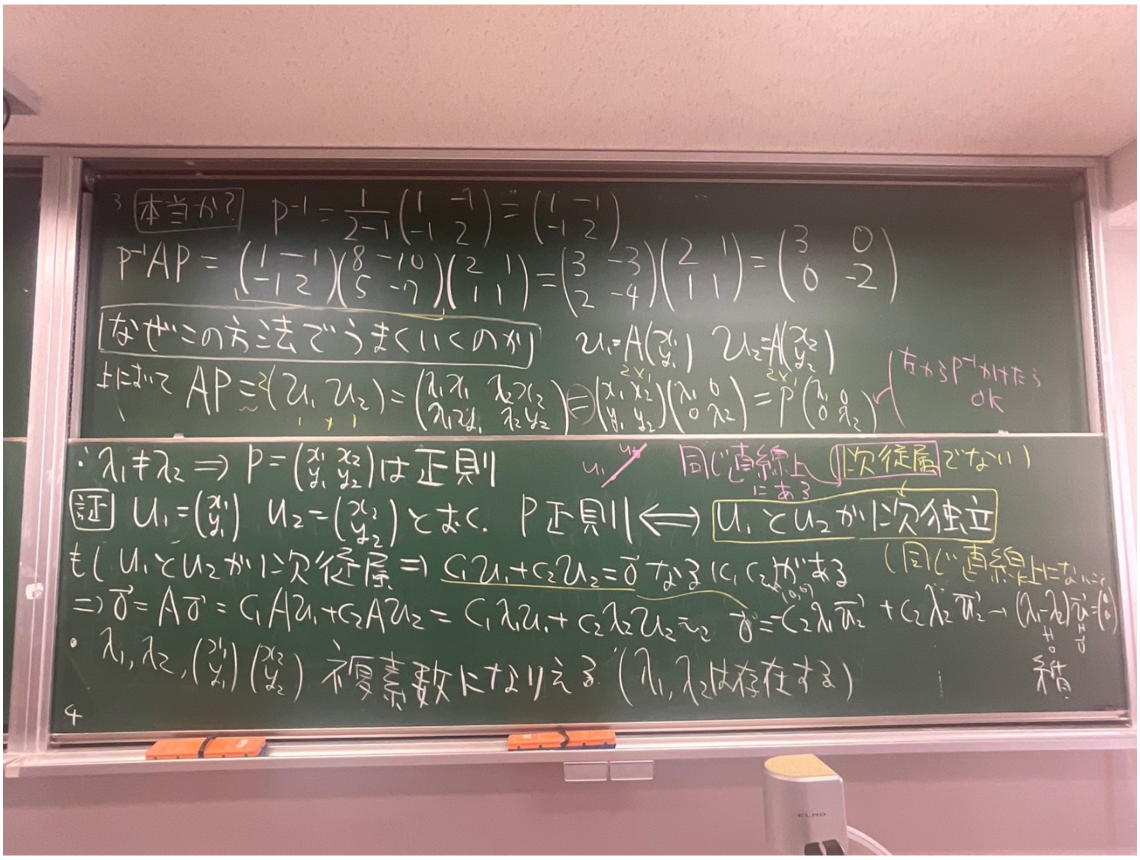
$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}8&-10\\5&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ をもとめる $\rightsquigarrow \begin{cases}8x_1-10y_1=3x_1\\5x_1-7y_1=3y_1\end{cases}$ をとくと $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ととる

$\to \begin{pmatrix}8-3&-10\\5&-7-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}5&-10\\5&-10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\lambda_2=-2$ にも同様に $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ととる

3 $P=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ とすると $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&-2\end{pmatrix}$

2



3 本当か? $P^{-1}=\frac{1}{2-1}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&-10\\5&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3\\2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&-2\end{pmatrix}$

なぜこの方法でうまくいくのか　$v_1=A\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$　$v_2=A\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ (2×1)

上において $AP=(v_1\ v_2)=\begin{pmatrix}\lambda_1x_1&\lambda_2x_2\\\lambda_1y_1&\lambda_2y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$ 左からP⁻¹かけたらOK

・$\lambda_1\neq\lambda_2 \Longrightarrow P=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}$ は正則　u_1 u_2 同じ直線上にある　(1次従属でない)

証 $u_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ $u_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ とおく. P正則 $\Longleftrightarrow$ u_1 と u_2 が1次独立 (同じ直線上にない)

もし u_1 と u_2 が1次従属 $\Longrightarrow$ $c_1u_1+c_2u_2=\vec{0}$ なる c_1, c_2 がある $(0,0)$

$\Longrightarrow \vec{0}=A\vec{0}=c_1Au_1+c_2Au_2=c_1\lambda_1u_1+c_2\lambda_2u_2$　$\vec{0}=-c_2\lambda_1\vec{u_2}+c_2\lambda_2\vec{u_2} \to (\lambda_1-\lambda_2)\vec{u_2}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

・$\lambda_1, \lambda_2, \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ 複素数になりえる (λ₁, λ₂は存在する)　矛盾

4

ではあ $\lambda_1=\lambda_2$ のときは？ ← 対角化できない場合がある

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ λ_1 の固有ベクトル
$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ λ_1 〃 ⤳ $P=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ が正則になるようにとれれば対角化可能

（とれなければ対角化不可能）

$\boxed{例}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 対角化不可能

$\det(A-tE_2)=\begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{vmatrix}=0$ の解は $t=1$ のみ
（λ_1 とおく）

⤳ $A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ をもとめる ⤳ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ⤳ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ∴ $y_1=0$ ⤳ $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
（t じゆう）

$A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

⤳ $P=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 正則ではない！→（対角化不可能）

2

3 $\boxed{定理}$ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が対角化可能であることは次のどちらか一方が成り立つことと同値

① $A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ なる λ がある

② A が相異なる固有値 λ_1, λ_2 をもつ

$\boxed{証}$ ① か ② が成立 ⟹ 対角化可能 やった

逆に A が対角化可能なら $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ となる

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Longrightarrow$ ② 成立

$\lambda_1=\lambda_2$ のとき $A=P(P^{-1}AP)P^{-1}=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}P^{-1}=\lambda_1 P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}=\lambda_1 PP^{-1}$
$=\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ //

（2×2 で対角化不可能なケースを考えるいみはあまりない）（上は 2×2 特有のでいい）

（$\lambda_1=\lambda_2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ だから）

4

正規直交基底

$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ が正規直交基底であるとは 1

$\begin{cases} \|v_1\| = \|v_2\| = 1 \\ (v_1, v_2) = 0 \end{cases} \to (\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ となること

v_1, v_2

$\boxed{例}$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{補}$ 正規直交基底 $\Rightarrow$ 基底 $\left(\begin{array}{l} \cdot\ 1次独立かつ \\ \cdot\ にんいの\ \vec{v} \in \mathbb{R}^2,\ ある\ c_1 c_2\ があって\ v = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2\ となる \end{array} \right)$

$\boxed{証}$ 「(v_1, v_2) 基底 $\Leftrightarrow$ $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 1次独立」より右を示す

「$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$」を示す $\left(「c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow c_1 (v_1, \overset{1}{v_1}) + c_2 (v_1, \overset{0}{v_2}) = 0 \right.$

$(\vec{v}_1$

$\Rightarrow c_1 = 0,\ c_2 = 0$

命題 v_1, v_2 正規直交基底 $x = c_1 v_1 + c_2 v_2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\|x\| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ 2

3 $\boxed{証}$ $\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{(c_1 u_1 + c_2 u_2, c_1 u_1 + c_2 u_2)}$

$= \sqrt{c_1^2 + 0 + 0 + c_2^2} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

$\boxed{例}$ $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}$ $\|2\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a} + 2\vec{b}\| = 1$

$(2\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} u = 2\vec{a} + \vec{b} \\ v = \vec{a} + 2\vec{b} \end{array}$ 正規直交基底

$\boxed{証}$ $\vec{a} + \vec{b} = \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v})$

$\leadsto (\vec{u}, \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v})) = \frac{1}{3} \leadsto \frac{1}{3}\|\vec{u}\| + \frac{1}{3}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{3} \leadsto (\vec{u}, \vec{v}) = 0$

$\vec{P} = x\vec{u} + y\vec{v}$ とおくと $\|\vec{P} - (\vec{a} + \vec{b})\| = \|(x - \frac{1}{3})\vec{u} + (y - \frac{1}{3})\vec{v}\|$

$(\vec{P}, \vec{u}) = (x\vec{u} + y\vec{v}, \vec{u}) = x$ $= \sqrt{(x - \frac{1}{3})^2 + (y - \frac{1}{3})^2}$

4