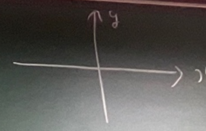
数ベクトル空間(2次元)



平面

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x$ と y は実数$\}$

$\Bigg(\vec{u} = (x, y)$ or $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \underbrace{\in \mathbb{R}^2}_{}$

$\quad$ ($\vec{u}$ は $\mathbb{R}^2$ の元(要素)))

$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

和と差 $\vec{u} \pm \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \pm x_2 \\ y_1 \pm y_2 \end{pmatrix}$

スカラー倍 $c\vec{u} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cy_1 \end{pmatrix}$ c:実数,

零ベクトル $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

・(標準)内積

$(\vec{u}, \vec{v}) = x_1x_2 + y_1y_2$

$\vec{u} \cdot \vec{v}$

・長さ(ノルム)

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

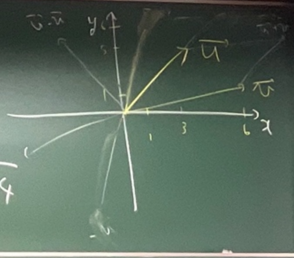
2

3

$\boxed{\text{例}}$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ $c = 2$

$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $c\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 6 + 5 \times 1 = 23$ $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$



$\boxed{\text{定義}}$ $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n} \in \mathbb{R}^2$ について

・$\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}$ が1次独立とは「$c_1\vec{u_1} + \dots + c_n\vec{u_n} = \vec{0}$ ならば $c_1 = \dots = c_n = 0$」

・$\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}$ が1次従属とは ある $c_1, \dots, c_n$ があって $c_1\vec{u_1} + \dots + c_n\vec{u_n} = \vec{0}$ となること

(ただし $c_1 = \dots = c_n = 0$ を除く)

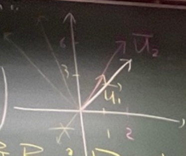
(←1次独立でない)

・$\vec{v} = c_1\vec{u_1} + \dots + c_n\vec{u_n}$ とかけるとき $\vec{v}$ は $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}$ の1次結合でかける

4

例 $\vec{u_1}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{u_2}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ 1次従属

$c_1=2,\ c_2=-1$ とすると $c_1\vec{u_1}+c_2\vec{u_2}=2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$



・$\vec{u_1}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ $\vec{u_2}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ 1次独立

例 $c_1\vec{u_1}+c_2\vec{u_2}=\vec{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}c_1+2c_2\\3c_1+5c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow c_1=c_2=0$

(1次従属 ≒ 同じ直線上にある

定理 $\mathbb{R}^2$

① $\vec{u_1}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$, $\vec{u_2}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ として. $\vec{u_1}$ $\vec{u_2}$ が1次独立であることは

$\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=ad-bc\neq 0$ と同値

② $\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}$ は常に1次従属

証 (1)「$c_1\vec{u_1}+c_2\vec{u_2}=\vec{0}$ が $c_1=c_2=0$ のみ」

$\Leftrightarrow$ 「$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ の解が $c_1=c_2=0$ のみ」

$ad-bc\neq 0\Rightarrow\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$ad-bc=0\Rightarrow\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d\\-c\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$ とおけば $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 以外の解となる

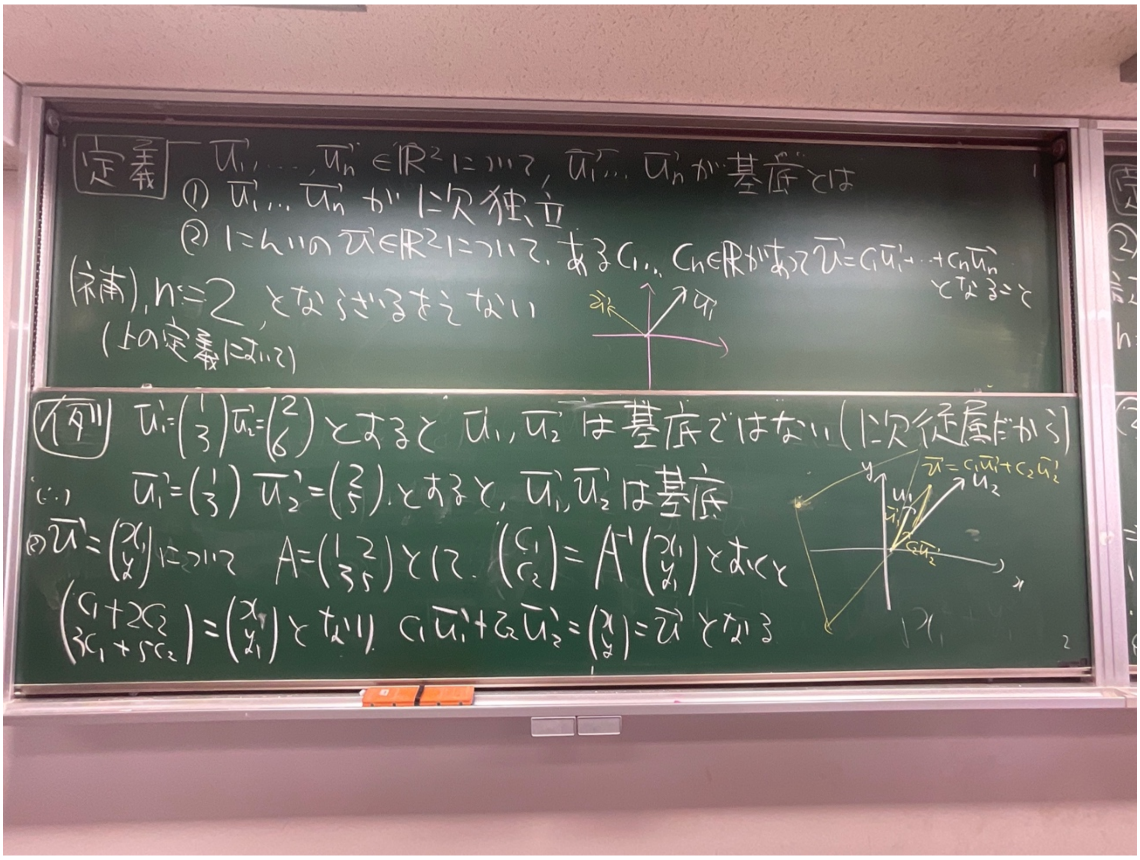
(2) $u_3=\begin{pmatrix}p\\r\end{pmatrix}$ とおく.

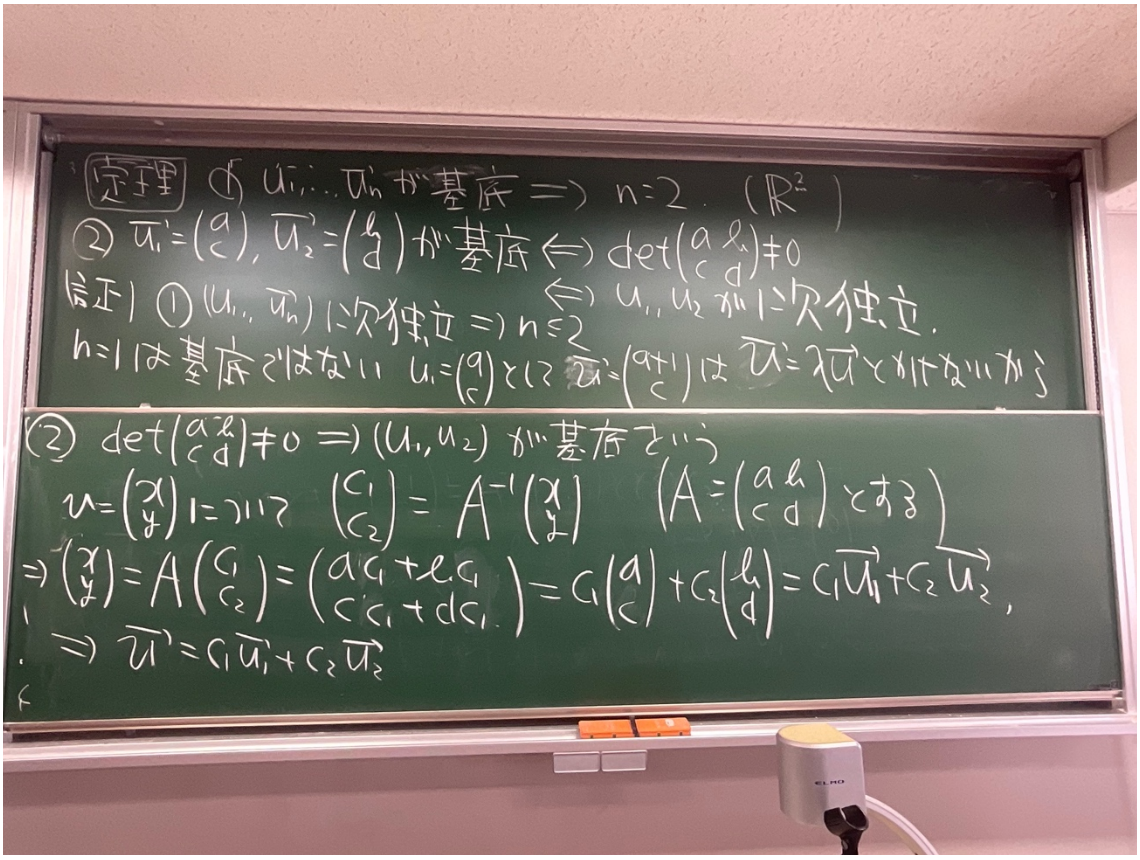
① $ad-bc\neq 0$ のとき. $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}-p\\-r\end{pmatrix}$ とする。$c_3=1$

$ac_1+bc_2=-p$
$cc_1+dc_2=-r$

$c_1\vec{u_1}+c_2\vec{u_2}+c_3\vec{u_3}=\begin{pmatrix}ac_1+bc_2+p\\cc_1+dc_2+r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-p+p\\-r+r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

② $ad-bc=0$ のとき。$\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d\\-c\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$, $c_3=0$ とすると $c_1\vec{u_1}+c_2\vec{u_2}+c_3\vec{u_3}=\vec{0}$

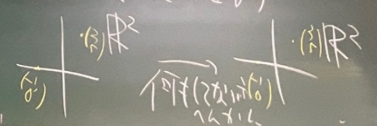

定義 $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in \mathbb{R}^2$ について, $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ が基底とは
① $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ が1次独立
② にんいの $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ について, ある $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ があって $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + \cdots + c_n\vec{u}_n$ となること
(補) $n=2$ とならざるをえない
(上の定義において)
例 $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ とすると $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ は基底ではない (1次従属だから)
$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ とすると, $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ は基底
(∵) $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ として $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと
$\begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 \\ 3c_1 + 5c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となり $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{v}$ となる
$\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$


定理 ① $u_1, \dots, \vec{u}_n$ が基底 $\Rightarrow$ $n=2$ ($\mathbb{R}^2$)
② $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ が基底 $\Leftrightarrow$ $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$
$\Leftrightarrow$ u_1, u_2 が1次独立.
証明 ① $(u_1, \dots, \vec{u}_n)$ 1次独立 $\Rightarrow$ $n \leq 2$
$n=1$ は基底ではない $u_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ として $\vec{v} = \begin{pmatrix} a+1 \\ c \end{pmatrix}$ は $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ とかけないから
② $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow (u_1, u_2)$ が基底をいう
$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ($A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする)
$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac_1 + bc_1 \\ cc_1 + dc_1 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$,
$\Rightarrow \vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$

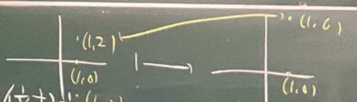
$\boxed{\text{1次変換}}$ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

(線型写像の一種) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{例1}}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

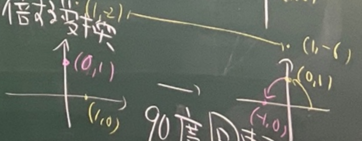


$\boxed{\text{例2}}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3y \end{pmatrix}$



y方向に3倍する変換

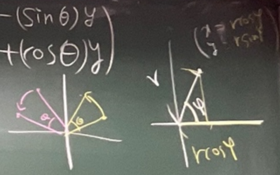
$\boxed{\text{例3}}$ $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$



90度回転 (左回り)

$\boxed{\text{例1}}$ $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\theta)x - (\sin\theta)y \\ (\sin\theta)x + (\cos\theta)y \end{pmatrix}$

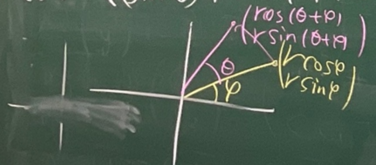
$\left(\theta = 90^\circ \quad A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ θ左回転変換

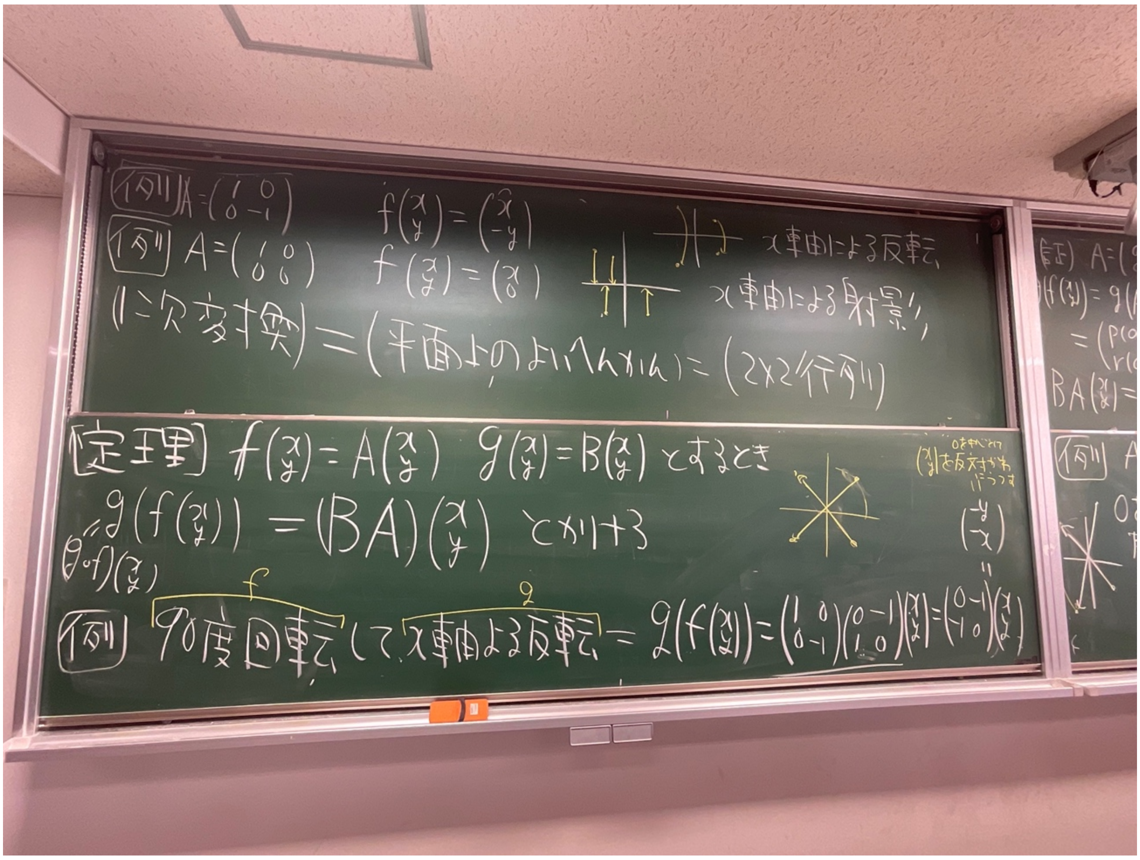


証) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ $r=\sqrt{x^2+y^2},\ 0 \leq \varphi < 2\pi$

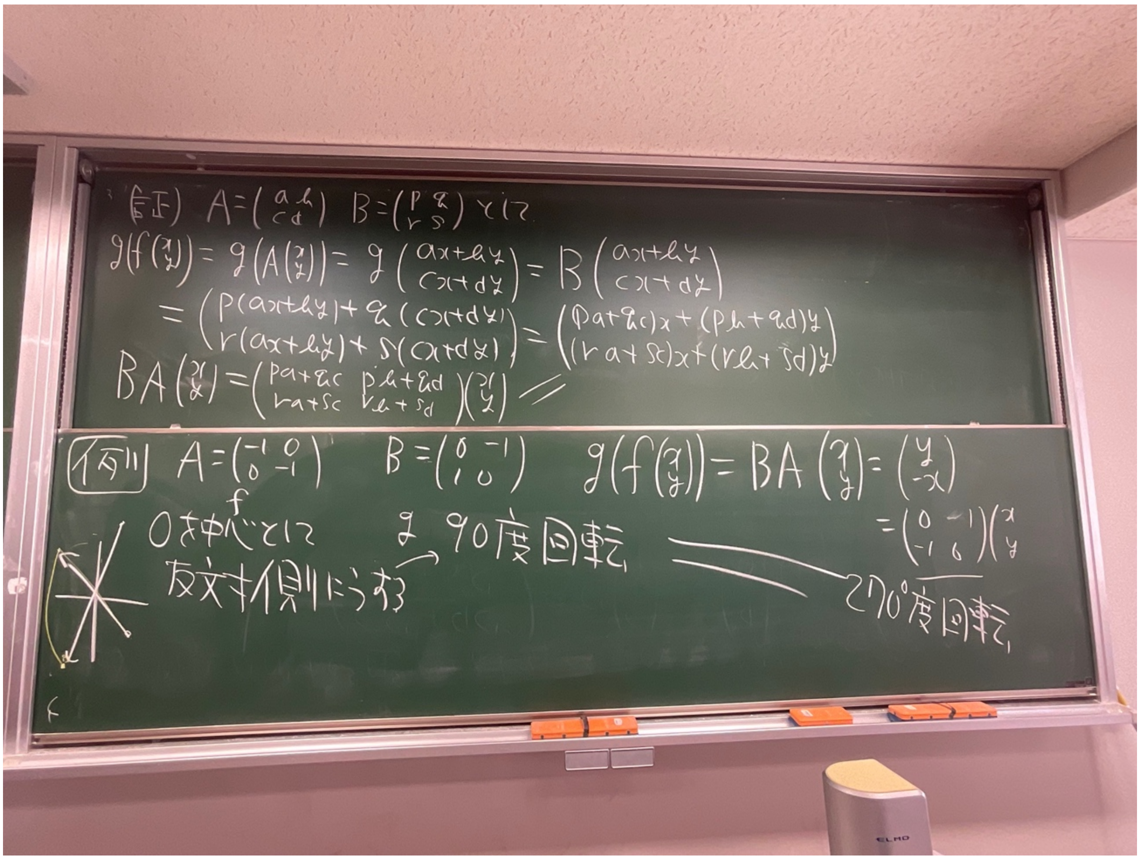
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\theta)\, r\cos\varphi - (\sin\theta)\, r\sin\varphi \\ (\sin\theta)\, r\cos\varphi + (\cos\theta)\, r\sin\varphi \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$$





例 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$ x軸による反転
例 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ x軸による射影
(1次変換) = (平面上のよいへんかん) = (2×2行列)
[定理] $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とするとき
$g\left(f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=(BA)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とかける
$(g\circ f)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
0を中心として $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を反対側にうつす
$\begin{pmatrix}-y\\-x\end{pmatrix}$
例 $\overbrace{\text{90度回転}}^{f}$ して $\overbrace{\text{x軸よる反転}}^{g}$ = $g\left(f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$



(証) $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$ として
$g\left(f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=g\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=g\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}p(ax+by)+q(cx+dy)\\r(ax+by)+s(cx+dy)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(pa+qc)x+(pb+qd)y\\(ra+sc)x+(rb+sd)y\end{pmatrix}$
$BA\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}pa+qc&pb+qd\\ra+sc&rb+sd\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ //
例 $A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ $g\left(f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=BA\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}$
f 0を中心として反対側にうつす → g 90度回転
$=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
270°度回転