$\boxed{\text{前回}}$ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ $AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ap+br \\ cp+dr \end{pmatrix}$.

行列の積2　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　$B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$

$$AB := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{例}}$ $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times5+3\times2 & 2\times2+3\times3 \\ 1\times5+4\times2 & 1\times2+4\times3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\times2+2\times1 & 5\times3+2\times4 \\ 2\times2+3\times1 & 2\times3+3\times4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 23 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$$

$\boxed{AB \neq BA}$

非可換（ひかかん）

2

3 $\boxed{\text{例}}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E_2$ 単位行列

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times1+2\times0 & 1\times0+2\times1 \\ 2\times1+1\times0 & 2\times0+1\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times1+0\times2 & 1\times2+0\times1 \\ 0\times1+1\times2 & 0\times2+1\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$AE_2=E_2A=A$

積の性質
- $AO=OA=O$ （$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ぜろ行列）
- $AE_2=E_2A=A$ （$E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$）
- $(AB)C=A(BC)$
- $a(AB)=(aA)B$　・$(a+b)A=aA+bA$　・$(A+B)C=AC+BC$
- $a(A+B)=aA+aB$　・$A(B+C)=AB+AC$

4

定義 $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdots\cdots A}_{m\text{コ}}$

(m は1以上の自然数)

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$

例 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$A^3 = AAA = A(A^2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$

$A^m = ??$

$\boxed{\text{対角化}}$

例 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$

$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$

$A^m = \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 3^m \end{pmatrix}$

2

3 $\boxed{\text{定義}}$ A 2x2行列

ある2x2行列 B で $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ になるとき

B を A の逆行列といい $B = A^{-1}$ とかく.

A が逆行列をもつとき A は正則行列 (A は正則である) という

(regular normal)

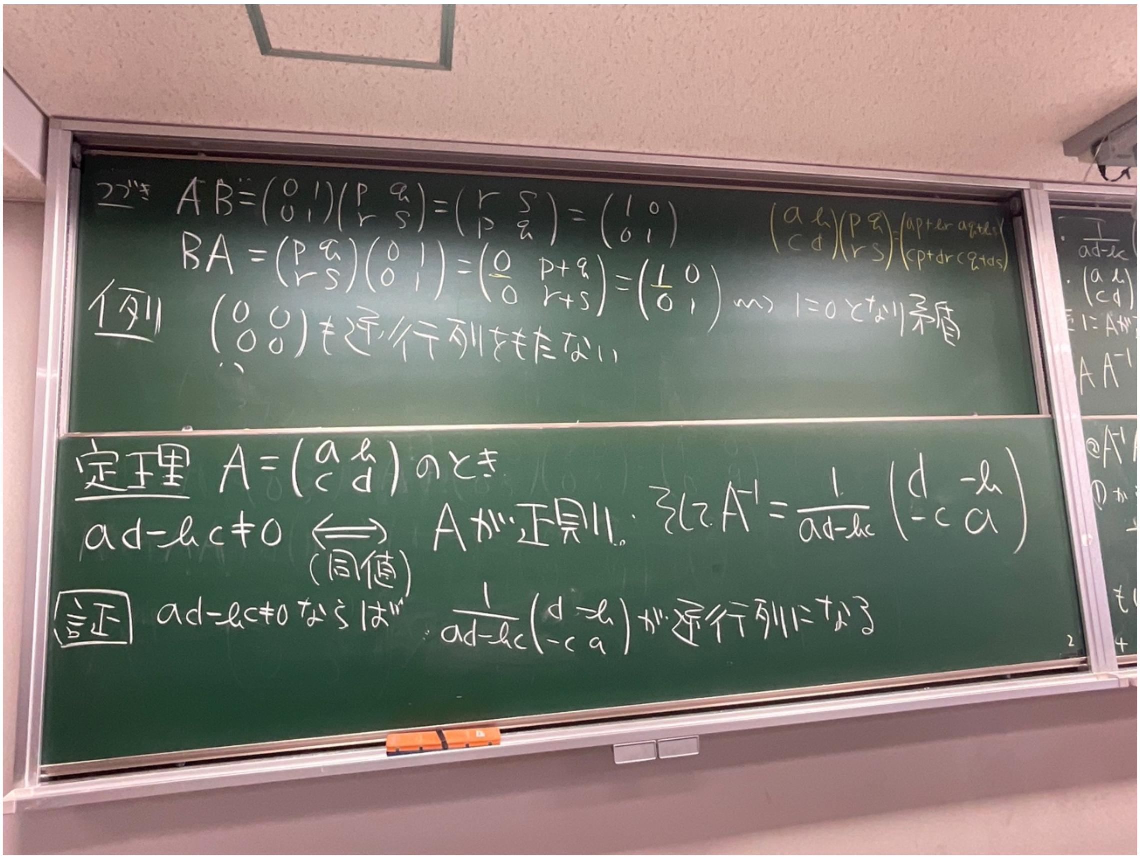
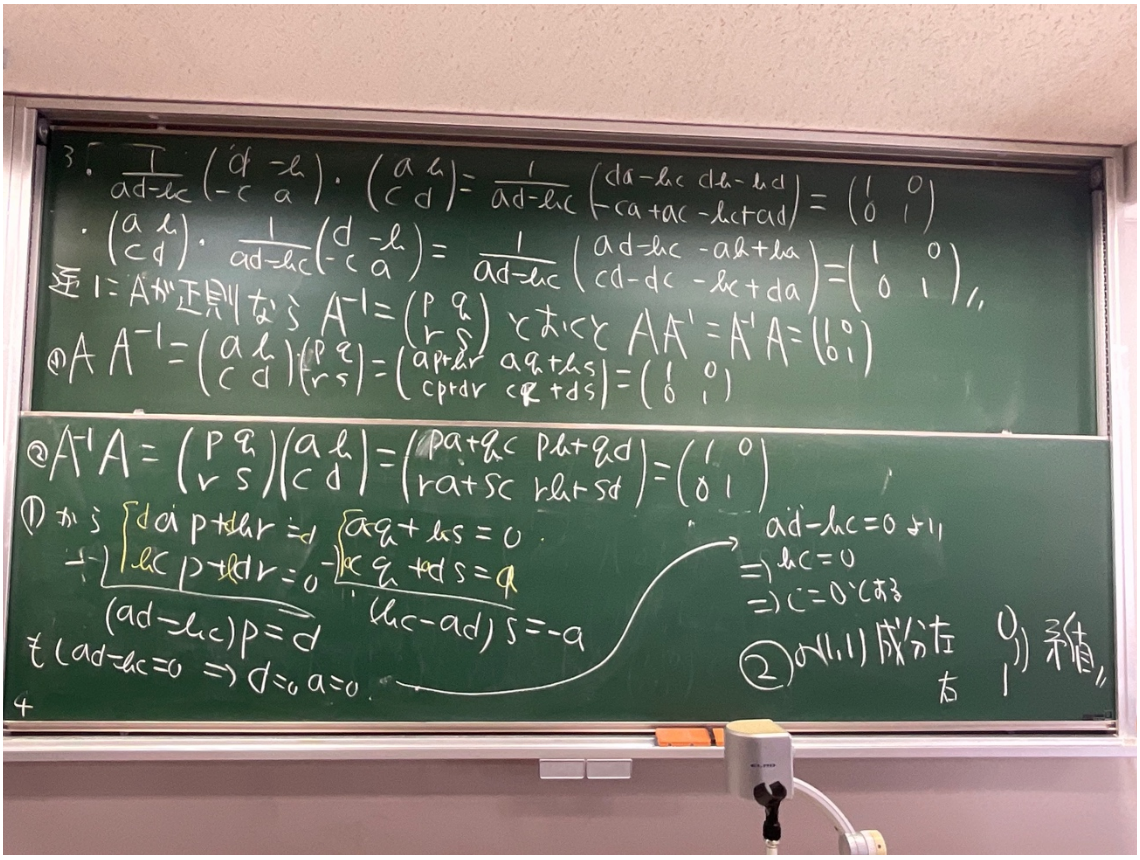
$\boxed{\text{例}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 正則. 逆行列 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

理由 $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{例}}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 正則ではない (逆行列もたない)

理由 もし正則なら $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ で $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる

4


つづき AB=(0 1 / 0 1)(p q / r s)=(r s / p q)=(1 0 / 0 1)
BA=(p q / r s)(0 1 / 0 1)=(0 p+q / 0 r+s)=(1 0 / 0 1) ⇝ 1=0となり矛盾
(a b / c d)(p q / r s)=(ap+br aq+bs / cp+dr cq+ds)
例 (0 0 / 0 0)も逆行列をもたない
定理 A=(a b / c d)のとき
ad−bc≠0 ⟺ Aが正則。そしてA⁻¹=1/(ad−bc) (d −b / −c a)
(同値)
証 ad−bc≠0ならば 1/(ad−bc) (d −b / −c a)が逆行列になる
2

3 · 1/(ad−bc) (d −b / −c a)·(a b / c d)=1/(ad−bc) (da−bc db−bd / −ca+ac −bc+ad)=(1 0 / 0 1)
· (a b / c d)·1/(ad−bc) (d −b / −c a)=1/(ad−bc) (ad−bc −ab+ba / cd−dc −bc+da)=(1 0 / 0 1)
逆にAが正則ならA⁻¹=(p q / r s)とおくとAA⁻¹=A⁻¹A=(1 0 / 0 1)
① AA⁻¹=(a b / c d)(p q / r s)=(ap+br aq+bs / cp+dr cq+ds)=(1 0 / 0 1)
② A⁻¹A=(p q / r s)(a b / c d)=(pa+qc pb+qd / ra+sc rb+sd)=(0 1 / 0 1)
①から {dap+dbr=d {aq+bs=0
{bcp+bdr=0 {bcq+bds=b
(ad−bc)p=d (bc−ad)s=−a
もしad−bc=0 ⟹ d=0 a=0
ad−bc=0より
⟹ bc=0
⟹ c=0である
②の(1,1)成分 左 0
右 1 矛盾
4

定義 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行列式を $ad-bc$ とする

$\underbrace{\det A}_{\text{とかく}} = ad-bc$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$

定理 ① $\det(AB) = (\det A)(\det B) = \det(BA)$

② $\det A \neq 0 \Longleftrightarrow A$ は正則

③ $AB = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ならば A は正則で $B = A^{-1}$ となる

証) ②やった。①をみとめて③を示す

③ $\underbrace{\det(AB)}_{(\det A)(\det B)} = \det(E_2) = 1 \rightsquigarrow \det A \neq 0 \overset{②}{\rightsquigarrow} A$ は正則 (A^{-1}をもつ)

$\rightsquigarrow B = E_2 B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}E_2 = A^{-1}$

2

3 ① $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$

$\det(AB) = (ap+br)(cq+ds) - (aq+bs)(cp+dr)$

$= a\{p(cq+ds) - q(cp+dr)\} + b\{r(cq+ds) - s(cp+dr)\}$

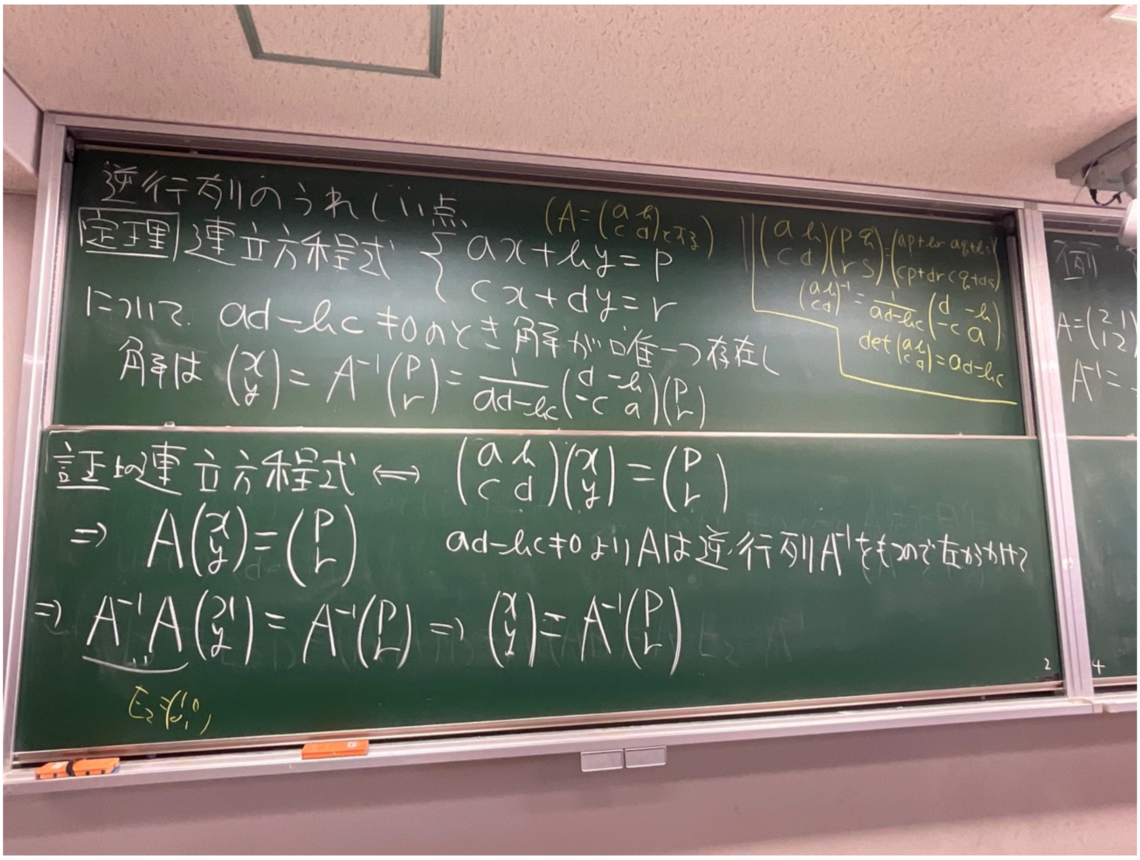
$= a\{pds - qdr\} + b\{rcq - scp\}$

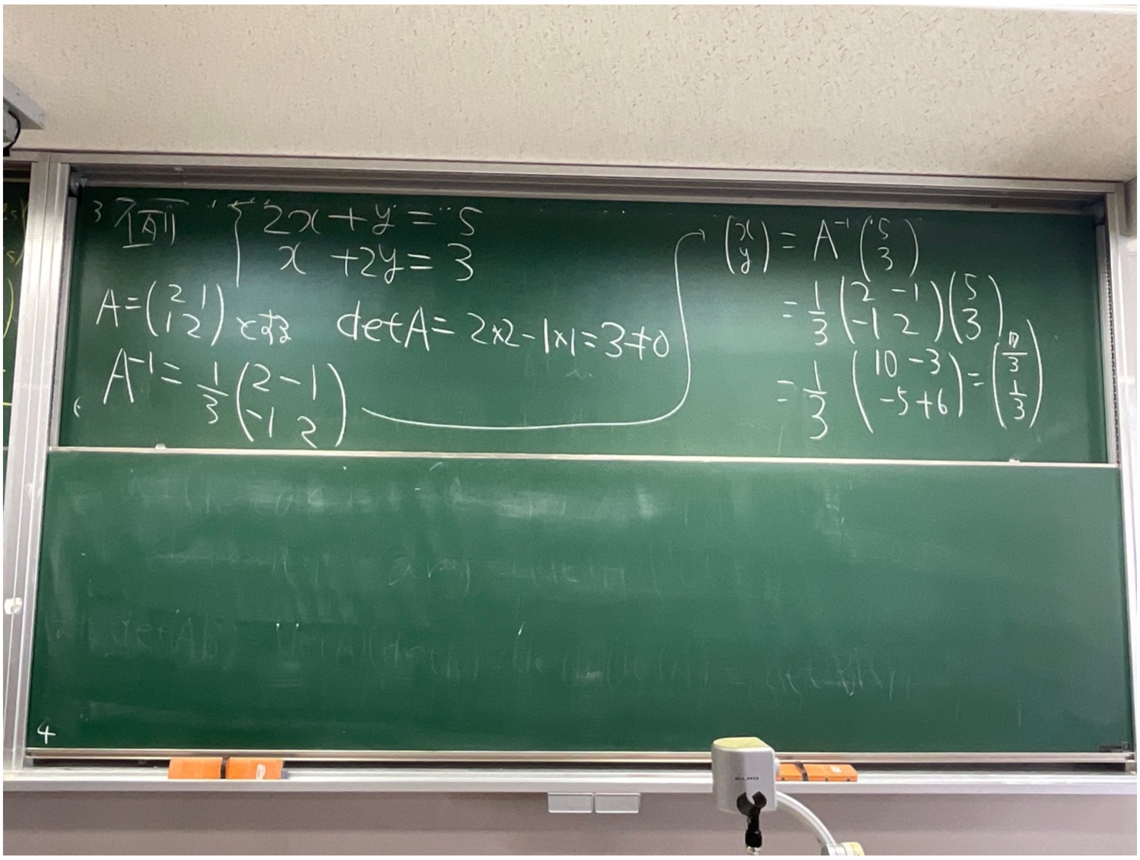
$= ad(ps-qr) + bc\{rq - sp\}$

$= (ad-bc)(ps-qr) = (\det A)(\det B)$

また $\det(AB) = (\det A)(\det B) = (\det B)(\det A) = \det BA$ //

4


逆行列のうれしい点
(A = (a b / c d) とする)
定理 連立方程式 { ax + by = p, cx + dy = r
について ad−bc ≠ 0 のとき解が唯一つ存在し
解は (x / y) = A⁻¹(p / r) = 1/(ad−bc) (d −b / −c a)(p / r)
(a b / c d)(p q / r s) = (ap+br aq+bs / cp+dr cq+ds)
(a b / c d)⁻¹ = 1/(ad−bc) (d −b / −c a)
det(a b / c d) = ad−bc
証明 連立方程式 ⟺ (a b / c d)(x / y) = (p / r)
⟹ A(x / y) = (p / r)
ad−bc≠0 よりAは逆行列A⁻¹をもつので左からかけて
⟹ A⁻¹A(x / y) = A⁻¹(p / r) ⟹ (x / y) = A⁻¹(p / r)
2


3 例 { 2x + y = 5, x + 2y = 3
A = (2 1 / 1 2) とする detA = 2×2 − 1×1 = 3 ≠ 0
A⁻¹ = 1/3 (2 −1 / −1 2)
(x / y) = A⁻¹(5 / 3)
= 1/3 (2 −1 / −1 2)(5 / 3)
= 1/3 (10 −3 / −5 +6) = (7/3 / 1/3)
4