1/4, 1/18 休講, 1/11, 1/25 演習＋期末

補題 任意の $m\times n$ 行列 A はある正則 $m\times m$ 行列 R を用いて RA が簡約行列になる

証明

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \\ j \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 0 & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & 0 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix},\quad F_i^c = i\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & c & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},\quad G_{ij}^c = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & c & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

(c なんでも)

これらは正則 $E_{ij}^2 = E_m$　$F_i^c \cdot F_i^{\frac{1}{c}} = E_m$ $(c\neq 0)$　$G_{ij}^c \cdot G_{ij}^{-c} = E_m$

- $E_{ij}A \leftrightarrow A$ の i 行目と j 行目をいれかえる変換
- $F_i^c A \leftrightarrow A$ の i 行目を c 倍
- $G_{ij}^c A \leftrightarrow A$ の i 行目の c 倍を j 行目にたす

行基本変形

補題は行列の簡約化の存在からわかる

定理 n 次正則行列 A について, $n\times 2n$ 行列 $(A\ \ E_n)$ の簡約化が $(E_n\ \ B)$ となるとき B は A の逆行列となる。

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ とする。

$$(A, E_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\quad E_3 \qquad B$

逆行列は $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

証明 $(A\ E_n)$の簡約化が$(E_n\ B)$より、補題からある正則行列Rで

$$R(A\ E_n)=(E_n\ B)$$となる。

両辺比べると $RA=E_n$, $R=B$ $\xrightarrow[\text{(後の定理)}]{}$ Aは正則でBはAの逆行列

$(AB=E_n \Rightarrow A$は正則かつBはAの逆行列$)$

行列式と対角化 ($n=3$の正方行列)

定義 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ について $\det A = \boxed{aei+bfg+cdh}$ $\boxed{-afh-bdi-ceg}$.

(行列式)

$+$

ー負

$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

(教科書 3.2-3.3にきれいな図がある

(注) $n\geq 4$はちょと待んでください)

定理 A, B 3次行列のとき $\det(AB)=(\det A)\cdot(\det B)$

(2次のときにすでにやってる)

系 ① Aが正則 $\Longleftrightarrow$ $\det A\neq 0$

② $AB=E_3 \Longrightarrow A$は正則でBはAの逆行列。

証明 Aが正則なら $A\cdot A^{-1}=E_3$なる逆行列がある

$(\det A)(\det A^{-1}) \underset{(\text{定理})}{=} \det(AA^{-1})=\det(E_3)=\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=1$ よって $\det A\neq 0$

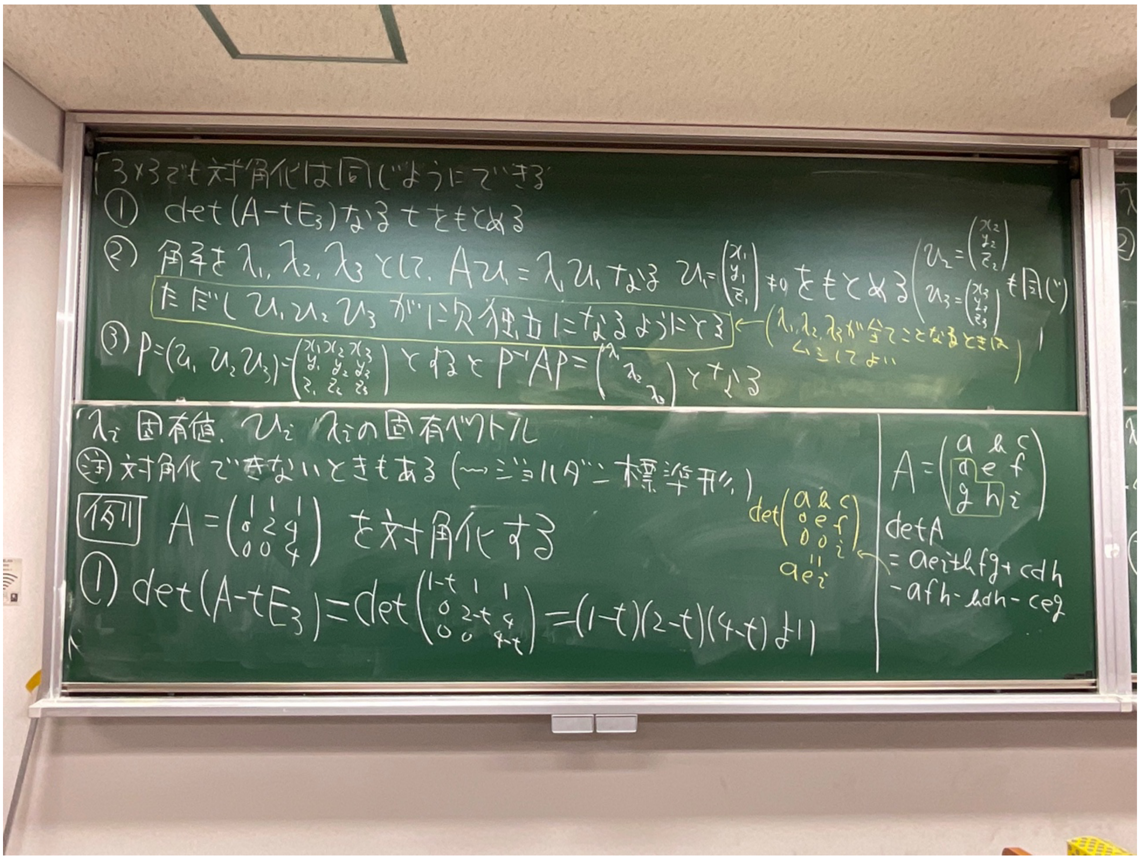
逆に $\det A\neq 0$とする。 Aの簡約化をBとする。補題から正則行列Rで$RA=B$となる

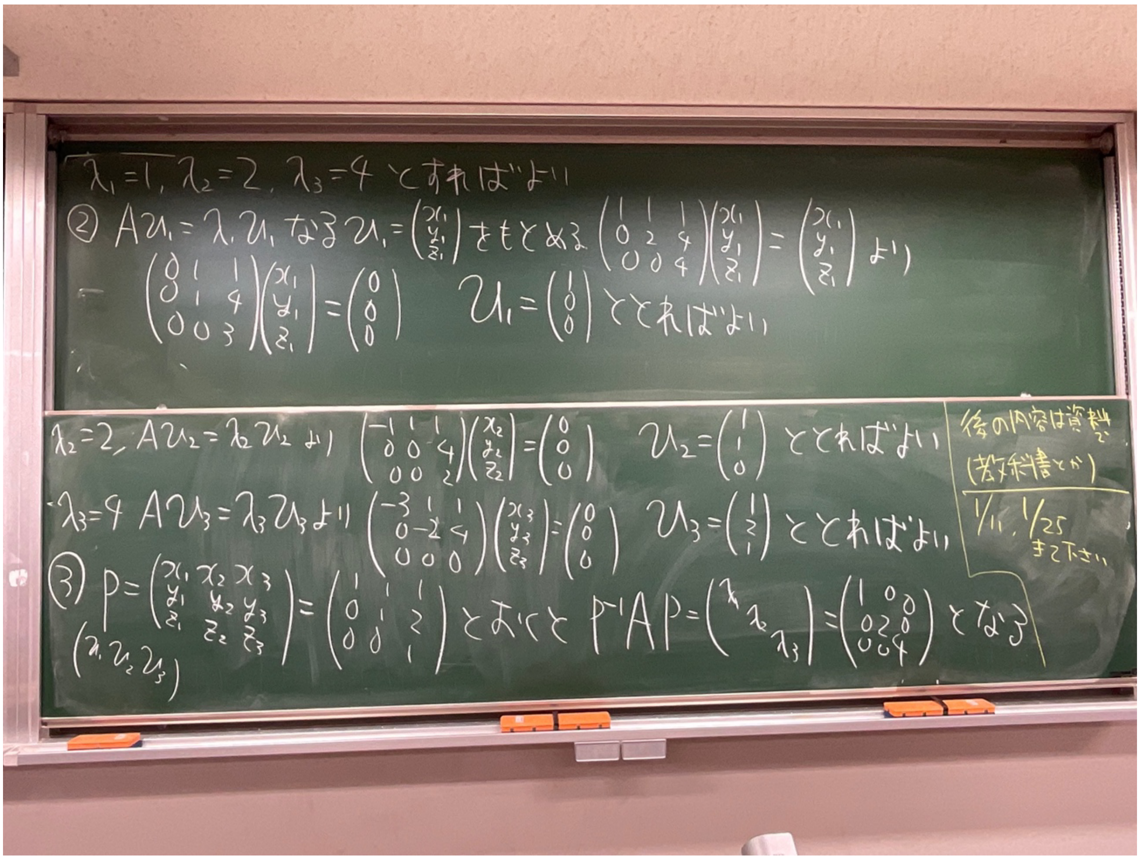
$\Rightarrow \det B=\det(RA)=(\det R)(\det A)\neq 0$ B簡約より $B=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$しかない。

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det=0$

よって $RA=E_3$. R正則よりR^{-1}があり、$A=R^{-1}$ 正則。

② $\det(AB)=1$より $\det A\neq 0 \underset{①}{\Longrightarrow} A$は正則. $A^{-1}=A^{-1}E_3=A^{-1}(AB)=A^{-1}AB=B$.


3×3でも対角化は同じようにできる
① $\det(A-tE_3)$ なる t をもとめる
② 解を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ として、$Av_1=\lambda_1 v_1$ なる $v_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\neq 0$ をもとめる ($v_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}$ も同じ)
ただし v_1, v_2, v_3 が1次独立になるようにとる
($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ が全てことなるときは むししてよい)
③ $P=(v_1\ v_2\ v_3)=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{pmatrix}$ とすると $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$ となる
λ_i 固有値、v_i λ_iの固有ベクトル
注) 対角化できないときもある (→ジョルダン標準形)
例 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&4\\0&0&4\end{pmatrix}$ を対角化する
① $\det(A-tE_3)=\det\begin{pmatrix}1-t&1&1\\0&2-t&4\\0&0&4-t\end{pmatrix}=(1-t)(2-t)(4-t)$ より
$\det\begin{pmatrix}a&b&c\\0&e&f\\0&0&i\end{pmatrix}=aei$
$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$
$\det A$
$=aei+bfg+cdh$
$-afh-bdh-ceg$


$\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=4$ とすればよい
② $Av_1=\lambda_1 v_1$ なる $v_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ をもとめる $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&4\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ より
$\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&4\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ととればよい
$\lambda_2=2$, $Av_2=\lambda_2 v_2$ より $\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&4\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ととればよい
$\lambda_3=4$ $Av_3=\lambda_3 v_3$ より $\begin{pmatrix}-3&1&1\\0&-2&4\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $v_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ ととればよい
③ $P=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ となる
$(v_1\ v_2\ v_3)$
後の内容は資料で (教科書とか)
1/11, 1/25 まで下さい