1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が簡約化であり階数は2。

2.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が簡約化であり

階数は 3 である

3 手順通りやる

① 拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$ となる

② それを簡約化する

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ となる

③ 簡約化に対応する連立一次方程式は

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

となる。

よって解は $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ である。

4. 手順通りやっていく

① 拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ となる。

② 簡約化すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

③ よって簡約化に対応する連立1次方程式は

$$\begin{cases} x_1 \quad + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

よって

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_3 + c_4 + 1 \\ c_3 - c_4 - 2 \\ c_3 \\ c_4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c_3, c_4は任意定数)

となる。