1 (1) 3×4 行列

(2) 0

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

2 (1) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3 + 3\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 125 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 & 3 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$

3 (1) $3\times4-1\times2=12-2=10$.

(2) $\dfrac{1}{2\times3-0\times1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3)
$$\frac{1}{100^2-99^2}\begin{pmatrix}100 & -99\\ -99 & 100\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{(100-99)(100+99)}\begin{pmatrix}100 & -99\\ -99 & 100\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{199}\begin{pmatrix}100 & -99\\ -99 & 100\end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$ 1つ目の方法　$A=\begin{pmatrix}100 & 99\\ 99 & 100\end{pmatrix}$ とおくと

$$A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$$ より

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}\underset{(3)-(3)}{=}\frac{1}{199}\begin{pmatrix}100 & -99\\ -99 & 100\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{199}\begin{pmatrix}200-297\\ -198+300\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{199}\begin{pmatrix}-97\\ 102\end{pmatrix}$$

2つ目の方法

これくらいなら計算した方が早い。

2つの式をたして　$199x+199y=5$

$$\therefore\ x+y=\frac{5}{199}$$

2つの式をひいて $x-y=-1$

よって $2x=\frac{5}{199}-1=\frac{-194}{199}$

$x=\frac{-97}{199}$

$y=x+1=\frac{-97}{199}+1=\frac{102}{199}$ …

5 1 判順通りする

① $\det(A-tE_2)=\det\begin{pmatrix}4-t & 2\\ 1 & 3-t\end{pmatrix}$を考える

$(4-t)(3-t)-2=0$

$\Rightarrow 12-7t+t^2-2=0$

$\Rightarrow t^2-7t+10=0$

$\Rightarrow (t-5)(t-2)=0$ $t=2,5$.

② $Au=2u$ なる $u=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$を1つもとめる

$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$ より

$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

(わからなければ $\begin{cases}4x+2y=2x\\ x+3y=2y\end{cases}$ をといてください)

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ ← (ここは $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ でなくてもよい)

$Au = 5u$ なる $u = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ をもとめると

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$ より

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

③ $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと.

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ となる.

また $(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$

一方 $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ より

$$A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$P^{-1} = \frac{1}{1 \times 1 - (-1)2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+2}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}_{\text{ans}}$$

$$A^n = P\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 5^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 5^n\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^n & 2\cdot 5^n\\ -2^n & 5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^n + 2\cdot 5^n & -2^{n+1} + 2\cdot 5^n\\ -2^n + 5^n & 2^{n+1} + 5^n\end{pmatrix}$$

(2) ① $\det(B - tE_2) = \det\begin{pmatrix}13-t & -30\\ 5 & -12-t\end{pmatrix}$ をとく。

$$\Rightarrow (13-t)(-12-t) - (-30)\cdot 5 = 0$$

$$\Rightarrow -156 - t + t^2 + 150 = 0$$

$$\Rightarrow t^2 - t - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (t-3)(t+2) = 0$$

$$t = 3, -2$$

② $Bx = 3x$ をとく $\left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)$

$$\begin{pmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$ より

$$\begin{pmatrix} 10 & -30 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Bx = -2x$ をとくと

$$\begin{pmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$ より

$$\begin{pmatrix} 15 & -30 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

③ $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$ //

また $(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \frac{1}{3-2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$ より

$$A^n = P \cdot (P^{-1}AP)^n \cdot P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3^{n+1} & 2\cdot(-2)^n \\ 3^n & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3^{n+1} + (-2)^{n+1} & -2\cdot 3^{n+1} + 6(-2)^n \\ 3^n - (-2)^n & -2\cdot 3^n + 3\cdot(-2)^n \end{pmatrix}$$