$$1\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 11 & -2 \end{pmatrix} \quad //$$

$\boxed{2}$ 手順通りやっていく

① $\det(A - tI_2) = 0$ なる t を求める

$$\det\begin{pmatrix} 4-t & 0 \\ 2 & 1-t \end{pmatrix} = (4-t)(1-t)$$ より

$t = 1, 4$

$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 1$ とおく。

② $Au_1 = \lambda_1 u_1$ なる u_1 をもとめる

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ $\left(u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right.$ とおく$\left.\right)$ より

$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ がある

$Au_2 = \lambda_2 u_2$ なる u_2 は $u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ より

$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がある

(3) $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる.

また $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ と

$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$A^n = P \cdot (P^{-1}AP)^n \cdot P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \cdot 4^n & 0 \\ 2 \cdot 4^n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \cdot 4^n & 0 \\ 2 \cdot 4^n - 2 & 3 \end{pmatrix}$$

③

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

階数2 //

問4 手順通りする。

① 拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ である

② これを簡約化すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2 4 2 2 −2

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2 −2 2 −8
3 −3 3 −12

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 よって.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= 6 \\ x_2 - x_3 &= -3 \\ x_4 &= -1 \end{aligned}$$

をとけばよく

解は $\begin{cases} x_1 = 6 - 3c_3 \\ x_2 = -3 + c_3 \\ x_3 = c_3 \\ x_4 = -1 \end{cases}$ (c_3任意定数となる)

5問目　手順通りやる

① 拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & 13 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & a \end{pmatrix}.$$

(4, 16, 8, -8, 20)

② これを簡約化すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & 13 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & 9 & -18 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & a \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-6 \end{pmatrix}.$$

44 ÷ 12 24

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 10 & -19 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-6 \end{pmatrix}$$

(B)より方程式は

$$\begin{cases} x_1 \quad -2x_3 + 10x_4 = -19 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = 6 \\ 0 = a-6 \end{cases}$$

となる

もし $a \neq 6$ なら解はない

$a = 6$ なら

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_3 - 10c_4 - 19 \\ -c_3 + 3c_4 + 6 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

(c_3, c_4 任意定数) として解を持つ

よって $\underline{a = 6}$ //

問6

(1) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ とすると

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

であるが

AもBも零行列でない

(2) $AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ なら

Aは正則であり BはAの逆行列となる

(授業でやった定理)

よって 逆行列の定義から $AB=BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ となる

(3) $\det(AB) = (\det A)\cdot(\det B)$ より

$$\det(ABC) = (\det A)\cdot(\det B)\cdot(\det C)$$
$$= (\det B)\cdot(\det A)\cdot(\det C)$$
$$= \det(BAC)$$

(4) AB が正則より $\det(AB) \neq 0$ となる

$(\det AB) = (\det A)\cdot(\det B)$ より

$\det A \neq 0$ かつ $\det B \neq 0$ である

よって A も B も正則である

($\det A \neq 0 \iff A$ は正則)

補足 (2)〜(4) は $n \times n$ でも成りたつ。

おまけ問題 $\boxed{\text{略}}$

・もしある行または列の和で負なものがあれば その行または列について操作をおこなう。
これをくり返せば負でないようにできる

$\boxed{\text{例}}$ 2×2のとき

$$\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}} & \begin{array}{c} 4 \\ -13 \end{array} \\ 2 & -5 & \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}} & \begin{array}{c} 4 \\ 13 \end{array} \\ -4 & 15 & \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$$

//

$\boxed{\text{理由}}$

ようは上のやりかたが無限につづかないことを示せばよい。

5×5行列 $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le 5\\ 1\le j\le 5}}$ に対し

その成分すべての和を $S=\sum_{\substack{1\le i\le 5\\ 1\le j\le 5}} a_{ij}$ とする

ある行が負であるときにこの操作をおこなうと

S はある定の定数ぶんふえる。

一方 $S \le \sum_{\substack{1\le i\le 5\\ 1\le j\le 5}} |a_{ij}|$ であるので

この操作は無限につづかない

(もし無限につづけば $\Sigma|a_{ij}|$ は無限になってしまう!!)