

期末試験

2023 年度秋冬学期 大阪大学 全学共通教育科目 線形代数学入門 (経 (161~))

岩井雅崇 (いわいまさたか) 2024/01/25

下の問題を解け。ただし解答に関しては答えのみならず、答えを導出する過程をきちんと記すこと。

第1問. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ を求めよ。

第2問. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする. A を対角化せよ. また A^n を n を用いて表せ.

第3問. 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ を簡約化し, その階数を求めよ.

第4問.

行基本変形と行列の簡約化を用いて, 次の連立1次方程式の解を求めよ.

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

第5問.

連立1次方程式 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5 \\ 4x_1 + 13x_2 + 5x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = a \end{cases}$ の解が存在するような a の値を全

て求めよ.

第6問に続く

第6問

次の問題に答えよ。ただし解答に際し授業・教科書で証明を与えた定理に関しては自由に用いて良い。

- (1). 2×2 行列 A, B について, AB は零行列であるが, A も B も零行列でない行列 A, B の例を一つあげよ.
- (2). 2×2 行列 A, B について, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ならば, $AB = BA$ であることを示せ.
- (3). 2×2 行列 A, B, C について, $\det(ABC) = \det(BAC)$ であることを示せ.
- (4). 2×2 行列 A, B について, AB が正則行列ならば, A も B も正則行列であることを示せ.

おまけ問題

各成分が実数である 5×5 行列に関して次の操作を考える。

(操作): 好きな行, または好きな列を一つ選び, その行 (または列) の成分の符号を一斉に入れ替える。

いかなる 5×5 行列についても, 上の操作をうまく繰り返せば, どの行の和, 列の和も負でないようにできることを示せ。

[補足] 問題文だけだと難しいと思うので例を挙げる。例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の場合, 1 行目の和は $1 - 2 - 3 + 1 + 1 = -2$ で負になっている。そこで 1 行目に操作を行うと

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となり無事にどの行の和, 列の和も負でないようにできる。実際 1 行目の和は 2, 2 行目の和は 11, 3 行目の和は 9, 4 行目の和は 5, 5 行目の和は 5 であり, 1 列目の和は 0, 2 列目の和は 13, 3 列目の和は 11, 4 列目の和は 5, 5 列目の和は 3 となっている。

この例では 1 回の操作でどの行の和, 列の和も負でないようにできたが, 一般にはうまくいかない。果たしてどのように操作を繰り返し行えば良いだろうか。その方法を理由とともに書いてほしい。

問題は以上である。