問6.6 (b) 回答.

$a=(1:0)$ の場合.

$$f^{-1}(a) = \{(x,y,0,0)\in S^3\} \subset S^3 \subset \mathbb{R}^4\setminus\{0\}$$

($f^{-1}(a)$ に $\mathbb{R}^4\setminus\{0\}$ の部分位相をいれる)

これが S^1 と同相なのは…

$$G: \mathbb{R}^4\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z,w) \longrightarrow (x,y)$$
とし 連続

$$F: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^4\setminus\{0\}$$
$$(s,t) \longrightarrow (s,t,0,0)$$
とする (射影,包含)

$$G|_{f^{-1}(a)} : f^{-1}(a) \longrightarrow G(f^{-1}(a)) = S^1$$ 連続

$$F : S^1 \longrightarrow F(S^1) = f^{-1}(a)$$

$$G\circ F = F\circ G = \mathrm{id} \Rightarrow F, G \text{ は同相.}$$

同様に $a=(0:1)$ のときもいえる.

αが一般の場合…，$\alpha = [1 : \lambda]$ なる $\lambda \in \mathbb{C}$ をとる

$f^{-1}(\alpha) = f^{-1}([1:\lambda])$　　$\lambda = \mu + i\nu$ とする。

$$= \left\{ \left(\frac{\cos 2\pi t}{1+|\lambda|^2}, \frac{\sin 2\pi t}{1+|\lambda|^2}, \frac{\mu\cos 2\pi t - \nu \sin 2\pi t}{1+|\lambda|^2}, \frac{\nu\cos 2\pi t + \mu \sin 2\pi t}{1+|\lambda|^2} \right) \,\middle|\, t \in [0,1] \right\}$$

となることを考えると（あとで示す）

$$F : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$$
$$(x, y, z, w) \to (x, y, \mu z + \nu w, -\nu z + \mu w)$$

← 同相

$$G : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$$
$$(x, y, z, w) \to (x+z, y+z, |\lambda|^2 x - z, |\lambda|^2 y - w)$$

F によって $f^{-1}(\alpha)$ と $W := \left\{ \left(\frac{\cos 2\pi t}{1+|\lambda|^2}, \frac{\sin 2\pi t}{1+|\lambda|^2}, \frac{|\lambda|^2\cos 2\pi t}{1+|\lambda|^2}, \frac{|\lambda|^2\sin 2\pi t}{1+|\lambda|^2} \right) \right\}_{t\in[0,1]}$

は同相

G によって W と $f^{-1}(0) = \{ (x, y, 0, 0) \in S^3 \}$

が同相になる

$a = C(1:\lambda)$ のとき $\lambda = \mu + i\nu$ とおくと

$$\frac{z+iw}{x+iy} = \lambda = \mu + i\nu \quad ①$$

$$\Rightarrow \boxed{z + iw = (x\mu - \nu y) + i(y\nu + \mu y)}$$

一方 $x^2+y^2+z^2+w^2=1$ より

$$|\lambda|^2 = \left|\frac{z+iw}{x+iy}\right|^2 = \frac{z^2+w^2}{x^2+y^2} \quad ②$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2 = \frac{1}{1+|\lambda|^2} \quad z^2+w^2 = \frac{|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2}}$$

①, ② より

$$f^{-1}(a) = f^{-1}(C(1:\lambda))$$

$$= \left\{ \left(\frac{\cos 2\pi t}{1+|\lambda|^2}, \frac{\sin 2\pi t}{1+|\lambda|^2}, \frac{\mu\cos 2\pi t - \nu \sin 2\pi t}{1+|\lambda|^2}, \frac{\nu\cos 2\pi t + \mu \sin 2\pi t}{1+|\lambda|^2} \right) \,\middle|\, t \in [0,1] \right\}$$

となる.